

2019 年全国高中数学联赛模拟试题答案（二）

一、选择题（每小题 3 分，共 27 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
选项	D	C	A	B	A	B	C	B	B

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.)

三、

题号	10	11	12	13	14
答案	3	70	甲	6	$(-2)^{n-1} \cdot a^n$

三、简答题

15. 解：原式 = $\frac{x-1}{x} \div \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$ -----4 分

= $\frac{x-1}{x} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}$ -----6 分 = $\frac{x+1}{x}$ -----8 分

当 $x=2$ 时，原式 = $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ -----10 分

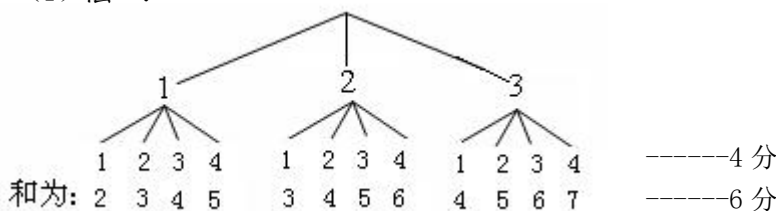
16.

解法二：

和 二次	一次			
		1	2	3
1		2	3	4
2		3	4	5
3		4	5	6
4		5	6	7

$P(\text{和为奇数}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. -----8 分

16. 解：（1）法一：



(2) 公平. 理由为: $P(\text{和为偶数}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\therefore P(\text{和为奇数}) = P(\text{和为偶数})$

\therefore 该方法公平 -----10 分

17. 解: (1) 设乙独做 x 天完成此项工程, 则甲独做 $(x+30)$ 天完成此项工程.

由题意得: $20 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+30} \right) = 1$ -----2 分

整理得: $x^2 - 10x - 600 = 0$ (

解得: $x_1 = 30$ $x_2 = -20$ -----3 分

经检验: $x_1 = 30$ $x_2 = -20$ 都是分式方程的解,

但 $x_2 = -20$ 不符合题意舍去 -----4 分

$x + 30 = 60$

答: 甲、乙两工程队单独完成此项工程各需要 60 天、30 天. -----5 分

(2) 设甲独做 a 天后, 甲、乙再合做 $(20 - \frac{a}{3})$ 天, 可以完成

此项工程. -----7 分

(3) 由题意得: $1 \times a + (1 + 2.5)(20 - \frac{a}{3}) \leq 64$

解得: $a \geq 36$ -----9 分

答: 甲

工程队至少要独做 36 天后, 再由甲、乙两队合作完成剩下的此项工程, 才能使施工费不超过 64 万元. -----10 分

18. 解: (1) \because 二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图像经过点 A (2, 0) C(0, -1)

$$\therefore \begin{cases} 2 + 2b + c = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

解得: $b = -\frac{1}{2}$ $c = -1$ -----2 分

\therefore 二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ -----3 分

(2) 设点 D 的坐标为 $(m, 0)$ ($0 < m < 2$)

$\therefore OD = m$ $\therefore AD = 2 - m$

由 $\triangle ADE \sim \triangle AOC$ 得, $\frac{AD}{AO} = \frac{DE}{OC}$ -----4 分

$\therefore \frac{2 - m}{2} = \frac{DE}{1}$

$\therefore DE = \frac{2 - m}{2}$ -----5 分

$\therefore \triangle CDE$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times \frac{2 - m}{2} \times m$

$= -\frac{m^2}{4} + \frac{m}{2} = -\frac{1}{4}(m - 1)^2 + \frac{1}{4}$

当 $m = 1$ 时, $\triangle CDE$ 的面积最大

∴点D的坐标为 (1, 0) -----8分

(3) 存在 由(1)知：二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

设 $y=0$ 则 $0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ 解得： $x_1=2$ $x_2=-1$

∴点B的坐标为 (-1, 0) C (0, -1)

设直线BC的解析式为： $y=kx+b$

$$\therefore \begin{cases} -k+b=0 \\ b=-1 \end{cases} \text{ 解得: } k=-1 \quad b=-1$$

∴直线BC的解析式为： $y=-x-1$

在 $Rt\triangle AOC$ 中, $\angle AOC=90^\circ$ $OA=2$ $OC=1$

由勾股定理得： $AC=\sqrt{5}$

∴点B(-1,0) 点C (0, -1)

∴ $OB=OC$ $\angle BCO=45^\circ$

①当以点C为顶点且 $PC=AC=\sqrt{5}$ 时,

设 $P(k, -k-1)$

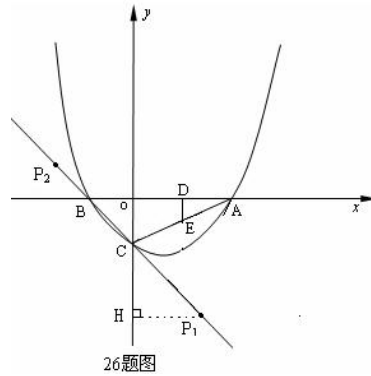
过点P作 $PH \perp y$ 轴于H

∴ $\angle HCP = \angle BCO = 45^\circ$

$CH=PH=|k|$ 在 $Rt\triangle PCH$ 中

$$k^2+k^2=(\sqrt{5})^2 \text{ 解得 } k_1=\frac{\sqrt{10}}{2}, \quad k_2=-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

∴ $P_1(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}-1)$ $P_2(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}-1)$ ---10分



②以A为顶点, 即 $AC=AP=\sqrt{5}$

设 $P(k, -k-1)$

过点P作 $PG \perp x$ 轴于G

$AG=|2-k|$ $GP=|-k-1|$

在 $Rt\triangle APG$ 中 $AG^2+PG^2=AP^2$

$$(2-k)^2+(-k-1)^2=5$$

解得： $k_1=1, k_2=0$ (舍)

∴ $P_3(1, -2)$ -----11分

③以P为顶点, $PC=AP$ 设 $P(k, -k-1)$

过点P作 $PQ \perp y$ 轴于点Q

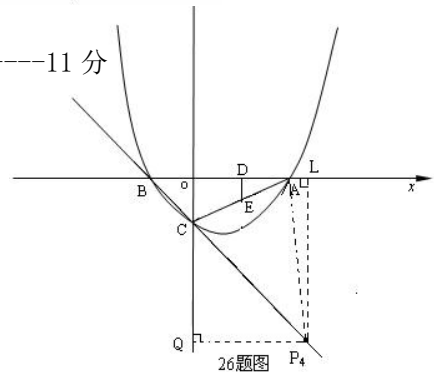
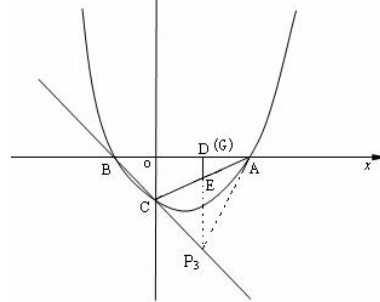
$PL \perp x$ 轴于点L

∴ $L(k, 0)$

∴ $\triangle QPC$ 为等腰直角三角形

$PQ=CQ=k$

由勾股定理知



$$CP=PA=\sqrt{2} k$$

$$\therefore AL=|k-2|, PL=|-k-1|$$

在 Rt△PLA 中

$$(\sqrt{2} k)^2=(k-2)^2+(k+1)^2$$

$$\text{解得: } k=\frac{5}{2} \therefore P_4\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right) \text{-----12 分}$$

综上所述: 存在四个点: $P_1\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}-1\right)$

$$P_2\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}-1\right) \quad P_3(1, -2) \quad P_4\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: [zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信扫一扫, 快速关注