

浙江省百校起点24届调研测试 高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

由 $N = \{x | 0 < x < 3\}$, 得 $M \cap N = \{1, 3\}$.

2. B 【解析】本题考查等比数列的定义,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $a_n + a_{n+1} = (-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n+1} = (-\frac{1}{2})^n (1 - \frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^{n+1}$, 所以 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 的首项为 $-\frac{1}{4}$, 且 $\frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

3. A 【解析】本题考查复数的运算、共轭复数、复平面,考查数学运算的核心素养.

因为 $z = \frac{10+5i}{2-i} = \frac{5(2+i)}{2-i} = \frac{5(2+i)^2}{(2+i)(2-i)} = 3+4i$, 所以 $\bar{z} = i(3-4i) = 4+3i$, 则 \bar{z} 在复平面内对应的点位于第一象限.

4. C 【解析】本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养.

$(2x-y)^5$ 的展开式中, x^3y^2 的系数为 $C_5^3 \times 2^2 \times (-1)^2 = -40$.

5. C 【解析】本题考查台体的体积,考查应用意识.

依题意可得该牛皮鼓的体积可视为两个相同的圆台(上底面半径为 25 cm, 下底面半径为 30 cm, 高为 30 cm)的体积之和, 所以该牛皮鼓的体积为 $2 \times \frac{1}{3} \pi \times 30 \times (25^2 + 25 \times 30 + 30^2) = 45500\pi \text{ cm}^3$.

6. D 【解析】本题考查对数大小的比较,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为 $\frac{3}{2} = \log_3 3\sqrt{3} < a = \log_3 6 < \log_3 9 = 2$, $c = \log_3 \frac{1}{8} = \log_3 8 = \log_3 2^3 = \frac{3}{2}$, 所以 $b > a > c$.

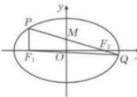
7. D 【解析】本题考查导数的几何意义及直线的倾斜角,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

$y' = 3x^2 - 4x$, 则 l 的斜率为 $3k^2 - 4k$. 因为 l 的倾斜角小于 135° , 所以 l 的斜率小于 -1 或小于 0 , 则 $3k^2 - 4k < -1$ 或 $3k^2 - 4k \geq 0$, 解得 $k \in (-\infty, 0] \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$.

8. D 【解析】本题考查椭圆的定义与性质,考查直观想象的核心素养.

如图, 连接 F_1Q , 由 $\overrightarrow{MF_2} = 2\overrightarrow{F_1Q}$, 得 $|PF_2| = 4|F_1Q|$. 设 $|F_1Q| = t$, 则 $|PF_2| = 4t$, $|PF_1| = 2a - 4t$, $|QF_1| = 2a - t$. 由余弦定理得 $|QF_1|^2 = |PF_1|^2 + |PQ|^2 - 2|PF_1||PQ|\cos\angle F_1PQ$, 即 $(2a-t)^2 = (2a-4t)^2 + (5t)^2 - 2(2a-4t) \times 5t \times \frac{2a-4t}{4t}$, 整理得 $t = \frac{5}{14}a$, 则

$|F_1F_2| = \sqrt{(4t)^2 - (2a-4t)^2} = \sqrt{16at - 4a^2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}a$, 故 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{|F_1F_2|}{2a} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



9. BCD 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质、三角恒等变换,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.



因为 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π . 因为 $f(\frac{5\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $f(-\frac{5\pi}{4}) = \sin(-\pi) = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{4}$ 对称, $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{5\pi}{4}, 0)$ 对称.
 $f(x) + f(-x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(-x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos x$.

10. ACD **【解析】** 本题考查统计中的极差、中位数、平均数、方差、百分位数, 考查数据处理能力与推理论证能力.

对于 A 选项, 如果删去的不是最大值或最小值, 那么极差不变, 所以 A 正确.

对于 B 选项, 删除前有 6 个数, 中位数是按从小到大的顺序排列后中间两个数的平均数, 因为任何两个数都不相等, 所以中位数不会等于 6 个数中的任何一个, 而删除后有 5 个数, 中位数是 6 个数中的某一个, 所以 B 错误.

对于 C 选项, 平均数不变意味着删去的数据刚好等于平均数, 在方差公式中, 分子不变, 分母变小, 所以方差变大, 所以 C 正确.

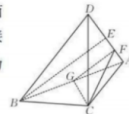
对于 D 选项, 平均数不变意味着删去的数据刚好等于平均数, 在按从小到大的顺序排列的 6 个数中, 因为 $6 \times 20\% = 1.2$, $5 \times 20\% = 1$, 所以原数据的 20% 分位数是第 2 个数, 新数据的 20% 分位数是前 2 个数的平均数, 且该数值小于第 2 个数, 所以 D 正确.

11. DC **【解析】** 本题考查抽象函数与具体函数的奇偶性, 考查逻辑推理与数学抽象的核心素养.

令 $x=y=0$, 得 $f(0)=0$, 令 $y=0$, 得 $f(x)=xf(0)=0$, 则 $f(-x)=f(x)=-f(x)=0$, 所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数. 由 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)=(x+1)[(x+1)^2-1]$, 得 $g(x)=x^3-x$, 因为 $g(-x)=-g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数.

12. ACD **【解析】** 本题考查立体几何初步中的体积、距离、二面角, 考查空间想象能力与运算求解能力.

如图, 取 AB 的中点 G, 连接 CG, 因为平面 ABC ⊥ 平面 ABD, 且平面 ABC ∩ 平面 ABD = AB, 所以 CG ⊥ 平面 ABD. 取 AD 的中点 E, 连接 BE, 因为 AB = BD, 所以 BE ⊥ AD, 则 $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 2\sqrt{2}$. 因为 $CG = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,



所以 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$, A 正确. 取 AE 的中点 F, 连接 FG, CF, 则 FG // BE, 所以 FG ⊥ AD. 因为 CG ⊥ 平面 ABD, 所以 CG ⊥ AD, 又 CG ∩ FG = G, 所以 AD ⊥ 平面 CFG, 则 AD ⊥ CF, 则 $CF = \sqrt{CG^2 + FG^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}$, ∠CFG 为二面角 B-AD-C 的平面角,

且 $\tan \angle CFG = \frac{CG}{FG} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$, B 错误. C 正确. 设 △ABD, △ABC 的外心分别为 K, M, 则 GK ⊥ AB, 又平面 ABD ⊥ 平面 ABC, 所以 GK ⊥ 平面 ABC. 设三棱锥 D-ABC 外接球的球心为



O, 则 $OK \perp$ 平面 ABD , $OM \perp$ 平面 ABC , 所以四边形 $OMGK$ 为矩形, 则 $OK = MG = \frac{1}{3}CG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心到平面 ABD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, D 正确.

13. $4\sqrt{2}$ 【解析】本题考查双曲线的性质, 考查数学运算的核心素养.

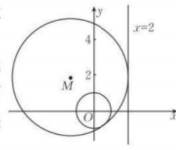
依题意可得 $2c=6, 2a=2$, 则 $c=3, a=1$, 所以该双曲线的虚轴长为 $2b=2\sqrt{c^2-a^2}=4\sqrt{2}$.

14. $\frac{2}{3}$ 【解析】本题考查投影向量与平面向量的基本定理, 考查直观想象的核心素养.

在矩形 $ABCD$ 中, 因为向量 \vec{AE} 在向量 \vec{AD} 上的投影向量为 $\frac{1}{3}\vec{AD}$, 所以 $\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$, 又 $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$, 所以 $\vec{OE} = \vec{AE} - \vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AD}$, 所以 $\lambda - \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

15. $y^2 = 1 - 2x$ 【解析】本题考查圆与圆的位置关系、直线与圆的位置关系, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

设 $M(x, y)$, 点 M 到直线 $x=2$ 的距离为 d , 如图, M 只能在直线 $x=2$ 的左侧, 则 $d=2-x$, 依题意可得 $|MO| + 1 = d$, 即 $\sqrt{x^2 + y^2} = (2-x) - 1$, 化简可得 $y^2 = 1 - 2x$, 故圆 M 的圆心的轨迹方程为 $y^2 = 1 - 2x$.



16. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 【解析】本题考查三角恒等变换与导数的应用, 考查数学建模与数学运算的核心素养.

设 $\tan \theta = x$, 则 $x > 1$, $\tan 2\theta - \tan \theta = \frac{2x}{1-x^2} - x = \frac{x+x^3}{1-x^2}$.

设函数 $f(x) = \frac{x+x^3}{1-x^2} (x > 1)$, 则 $f'(x) = \frac{-x^4 + 4x^2 + 1}{(1-x^2)^2} = -\frac{(x^2 - \sqrt{5} - 2)(x^2 + \sqrt{5} - 2)}{(1-x^2)^2} (x > 1)$.

当 $1 < x^2 < \sqrt{5} + 2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x^2 > \sqrt{5} + 2$ 时, $f'(x) < 0$.

所以当 $x^2 = \sqrt{5} + 2$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 即 $\tan 2\theta - \tan \theta$ 取得最大值.

此时 $\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} = \frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{1-(\sqrt{5}+2)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

17. (1) 证明: 因为 $\vec{ED_1} = 2\vec{C_1E}$, $\vec{FB_1} = 2\vec{C_1F}$, 所以 $\frac{ED_1}{C_1E} = \frac{FB_1}{C_1F} = 2$,

所以 $EF \parallel B_1D_1$,

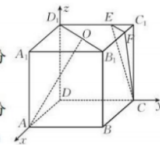
因为 $B_1D_1 \subset$ 平面 CEF , $EF \subset$ 平面 CEF , 所以 $B_1D_1 \parallel$ 平面 CEF .

..... 4分

(2) 解: 如图, 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系 $Dxyz$, 设 $AB=3$,

则 $A(3, 0, 0), C(0, 3, 0), O(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3), E(0, 2, 3), F(1, 3, 3)$,

$\vec{CE} = (0, -1, 3), \vec{EF} = (1, 1, 0)$,



设平面 CEF 的法向量为 $m = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{CE} \cdot m = -y + 3z = 0, \\ \vec{EF} \cdot m = x + y = 0, \end{cases}$ 7分

令 $x = 3$, 得 $m = (3, -3, -1)$, 8分

因为 $\vec{AO} = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3)$, 所以 $\cos \langle \vec{AO}, m \rangle = \frac{\vec{AO} \cdot m}{|\vec{AO}| |m|} = \frac{-12}{\frac{3\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{19}} = -\frac{8}{\sqrt{114}}$ 9分

所以直线 AO 与平面 CEF 所成角的正弦值为 $-\frac{8}{\sqrt{114}}$, 其平方为 $\frac{64}{114} = \frac{32}{57}$ 10分

评分细则:

【1】第(1)问中, 未写“ $B_1D_1 \subset$ 平面 $CEF, EF \subset$ 平面 CEF ”扣1分.

【2】第(2)问中, 建系方式不唯一, 平面 CEF 的法向量不唯一, 如果建系的方式相同, 那么只要所求法向量与 $m = (3, -3, -1)$ 共线即可.

18. 解: (1) 如图, 过 C 作 $CO \perp \beta$, 垂足为 O , 则 $CO = h$ 米, $\angle CBO = 45^\circ, \angle CDO = \alpha$, 2分

在 $Rt\triangle COB$ 中, $BC = \frac{h}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}h$ 米. 3分

在 $Rt\triangle COD$ 中, $CD = \frac{h}{\sin \alpha}$ 米. 4分

因为 $\tan \alpha = 2$, 所以 $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 5分

所以 $CD = \frac{\sqrt{5}h}{2}$ 米. 6分

(2) 在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD$, 7分

由(1)得 $518^2 = 2h^2 + \frac{5}{4}h^2 - \sqrt{10}h^2 \times \frac{9\sqrt{10}}{40}$, 整理得 $518^2 = h^2$, 即 $h = 518$ 10分

所以天门山的海拔为 $600 + 400 + 518 = 1518$ 米. 12分

评分细则:

【1】第(1)问中, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 不扣分, 结果未带单位(米), 共扣1分.

【2】第(2)中, 结果未带单位(米), 扣1分.

19. 解: (1) 用 M 表示事件“测试者提出的两个问题相同”, N 表示事件“测试者对机器产生误判”, 则 $P(N) = P(NM) + P(N\bar{M}) = P(M)P(N|M) + P(\bar{M})P(N|\bar{M})$ 3分

$= 0.6 \times 0.1 + (1 - 0.6) \times 0.35 = 0.2$ 5分

(2) 设 X 为 4 名测试者中产生误判的人数, 由(1)可知, $X \sim B(4, 0.2)$ 7分

若机器通过本轮的图灵测试, 则 4 名测试者中至少有 2 名产生误判, 8分

所以机器 A 通过图灵测试的概率 $P = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - C_4^0 \times 0.2^0 \times (1-0.2)^4 - C_4^1 \times 0.2 \times (1-0.2)^3 = 0.1808$ 12分

评分细则:



【1】第(1)问中,得到“ $P(N) = P(M)P(N|M) + P(\bar{M})P(N|\bar{M})$ ”,但未写“ $P(N) = P(NM) + P(N\bar{M})$ ”,不扣分.

【2】第(2)问中,得到“ $P = 1 - C_4^1 \times 0.2^4 \times (1-0.2)^0 - C_4^2 \times 0.2 \times (1-0.2)^3 = 0.1808$ ”,但未写“4名测试者中至少有2名产生误判”,不扣分.第(2)问还可以用直接法求解,解析如下:

设 X 为 4 名测试者中产生误判的人数,由(1)可知, $X \sim B(4, 0.2)$, 7分

若机器 A 通过本轮的图灵测试,则 4 名测试者中至少有 2 名产生误判, 8分

所以机器 A 通过图灵测试的概率 $P = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = C_4^2 \times 0.2^2 \times (1-0.2)^2 + C_4^3 \times 0.2^3 \times (1-0.2) + C_4^4 \times 0.2^4 = 0.1808$ 12分

20. (1)证明:当 $n=1$ 时, $S_2 + S_1 = 4$, 则 $a_2 + 2a_1 = 4$, 因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = 2$ 1分

当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_{n+1} + S_n = (n+1)^2$, 得 $S_n + S_{n-1} = n^2$, 两式相减得 $a_{n+1} + a_n = 2n+1$ 2分

又 $a_1 + a_2 = 3 = 2 \times 1 + 1$, 所以当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_{n+1} + a_n = 2n+1$ 3分

(2)解: $a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n) = (2n+3) - (2n+1) = 2$, 4分

所以 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 偶数项是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列, 5分

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 故 $a_n = n$ 6分

(3)解: $T_n = 0 - \frac{1}{2^2} - \frac{2}{2^3} - \dots - \frac{n-1}{2^{n+1}}$, 7分

则 $\frac{1}{2}T_n = -\frac{1}{2^3} - \frac{2}{2^4} - \dots - \frac{n-1}{2^{n+2}}$, 8分

则 $T_n - \frac{1}{2}T_n = -(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}) + \frac{n-1}{2^{n+2}}$, 9分

所以 $\frac{1}{2}T_n = -\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+2}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{n-1}{2^{n+2}} = \frac{n+1}{2^{n+2}} - \frac{1}{4}$, 11分

故 $T_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}$ 12分

评分细则:

【1】第(2)问中, 得到 $a_{n+1} + a_n = 2n+1$ 后, 还可以通过下面的方法得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式:

由 $a_{n+1} + a_n = 2n+1$, 得 $a_{n+1} - (n+1) = -(a_n - n)$, 因为 $a_1 - 1 = 0$, 所以 $a_n - n = 0$, 即 $a_n = n$.

【2】第(3)问还可以用裂项相消法求解, 过程如下:

因为 $b_n = \frac{1-a_n}{2^{n+1}} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n}$, 9分

所以 $T_n = \frac{2}{2^2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2^3} - \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}$ 12分

21. (1)证明: 将点 $(2, -2\sqrt{6})$ 代入 $y^2 = 2px$, 得 $24 = 4p$, 即 $p = 6$ 1分

联立 $\begin{cases} y^2 = 12x, \\ y = kx + m (k \neq 0), \end{cases}$ 得 $ky^2 - 12y + 12m = 0$, 2分



设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 y_2 = \frac{12m}{k}$, 3分

$$x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{12} \cdot \frac{y_2^2}{12} = \frac{(y_1 y_2)^2}{144} = \frac{m^2}{k^2}, \dots\dots\dots 4分$$

因为 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 所以 $\frac{m^2}{k^2} + \frac{12m}{k} = 0$ 恒成立, 则 $m = -12k$, 5分

所以 l_1 的方程为 $y = k(x - 12)$, 故直线 l_1 过定点 $(12, 0)$ 6分

(2) 解: 联立 $\begin{cases} y^2 = 12x, \\ y = 2x + m, \end{cases}$ 得 $4x^2 + (4m - 12)x + m^2 = 0$,

$$\text{则} \begin{cases} x_1 + x_2 = -m + 3, \\ x_1 x_2 = \frac{m^2}{4}, \end{cases} \dots\dots\dots 7分$$

且 $\Delta = (4m - 12)^2 - 16m^2 = 48(3 - 2m) > 0$, 即 $m < \frac{3}{2}$, 8分

$$|AB| = \sqrt{1 + 2^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + 2^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{9 - 6m}, \dots\dots\dots 9分$$

设 $l_2: y = 2x + n$, 同理可得 $|MN| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{9 - 6n}$ 10分

因为直线 l_2 在 l_1 的右侧, 所以 $n < m$, 则 $d = \frac{m - n}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, 即 $n = m - 5$ 11分

$$\text{所以 } |MN| - |AB| = \sqrt{5} [\sqrt{9 - 6(m - 5)} - \sqrt{9 - 6m}] = 10,$$

$$\text{即 } \sqrt{39 - 6m} = 2\sqrt{5} + \sqrt{9 - 6m}, \text{ 解得 } m = \frac{31}{24},$$

因为 $\frac{31}{24} < \frac{3}{2}$, 所以 $m = \frac{31}{24}$ 12分

评分细则:

【1】第(1)问中, 联立 $\begin{cases} y^2 = 12x, \\ y = kx + m (k \neq 0), \end{cases}$ 消去 y 得 $k^2 x^2 + (2km - 12)x + m^2 = 0$, 也可以求得

$m = -12k$, 从而得到直线 l_1 过定点 $(12, 0)$.

【2】第(2)问中, 还可以用 $|AB| = \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} |y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$, 得到 $|AB|$

$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{9 - 6m}$. 解析中, 未写 $\frac{31}{24} < \frac{3}{2}$, 但是得到 $m = \frac{31}{24}$, 不扣分.

22. 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, 则 $f'(x) = x - \sin x$ 1分

令函数 $g(x) = x - \sin x$, 则 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 可得 $g(x)$ 单调递增. 2分

又 $g(0) = 0$, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g(x) < 0$ 3分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$ 4分

(2) 若 $a = 0$, 则 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, 此时 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 故 $a \neq 0$ 5分



$f'(x) = x - a \sin ax$, 令函数 $h(x) = x - a \sin ax$, 则 $h'(x) = 1 - a^2 \cos ax = 1 - a^2 \cos |a|x$.
 6分

令函数 $\varphi(x) = 1 - a^2 \cos |a|x (a \neq 0)$, 可知 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增. 7分

①当 $\varphi(0) = 1 - a^2 \geq 0$ 且 $a \neq 0$, 即 $-1 \leq a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ 时, $\varphi(x) \geq \varphi(0) \geq 0$, 此时 $h(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{|a|}]$ 上单调递增, 则 $h(x) \geq h(0) = 0$, 此时 $x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极大值点. 8分

②当 $\varphi(0) = 1 - a^2 < 0$, 即 $a < -1$ 或 $a > 1$ 时, 由 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增, 可知存在 $m \in (0, \frac{\pi}{|a|})$, 使得当 $x \in [0, m)$ 时, $\varphi(x) < 0$, 则 $h(x)$ 在 $[0, m)$ 上单调递减. 9分

从而 $h(x) \leq h(0) = 0$, 即 $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $[0, m)$ 上单调递减. 10分

由 $f(-x) = \cos(-ax) + \frac{1}{2}(-x)^2 - 1 = \cos ax + \frac{1}{2}x^2 - 1 = f(x)$, 可得 $f(x)$ 为偶函数, $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 11分

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 12分

评分细则:
【1】第(1)问中, 最后没有回答函数的单调区间, 而是写为“ $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”不扣分.

【2】第(2)问中, 在说明 $a \neq 0$ 后, 也可以先讨论 $a > 0$, 再根据函数的奇偶性, 确定 $a < 0$ 中满足条件的 a 的范围, 最后求两种情况的 a 的取值集合的并集, 即得满足题意的 a 的取值范围.

