

姓名_____ 座位号_____

(在此卷上答题无效)

数 学(理科)

本试卷共 4 页,全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \ln x < 1\}$, $B = \{x | \sqrt{x+1} < \sqrt{3}\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
 A. $[2, e)$ B. $(0, 2)$ C. $(2, e]$ D. $(0, e)$

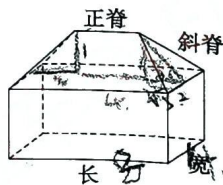
2. 复数 z 满足 $(2-i)z = 3+4i$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的模等于
 A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_7 = 28, a_2 + a_4 = 7$, 则 $a_6 =$
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

4. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 3 \\ x+y \geq 2 \\ y \leq x \end{cases}$, 则 $z = 4x+y$ 的最大值为
 A. 8 B. 10 C. 12 D. 15

5. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A > \cos B$ ” 是 “ $\sin A < \sin B$ ” 的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 成语“运筹帷幄之中,决胜千里之外”,意思是在小小的军帐之内作出正确的部署,决定了千里之外战场上的胜利,说的是运筹的重要性。“帷幄”是古代打仗必备的帐篷,又称“幄帐”。右图是一种幄帐示意图,帐顶采用“五脊四坡式”,四条斜脊的长度相等,一条正脊平行于底面。若各斜坡面与底面所成二面角的正切值均为 $\frac{1}{2}$, 底面矩形的长与宽之比为 2 : 1, 则正脊与斜脊长度的比值为



A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$

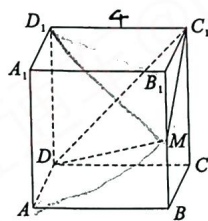
【D-022】数学(理科)试卷 第 1 页(共 4 页)

7. 已知 $\alpha \in \mathbf{R}$, $2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\pm\frac{3}{4}$ D. $\pm\frac{4}{3}$

8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, BB_1 的中点为 M , 过 C_1, D, M 的平面把正方体分成两部分, 则较小部分的体积为

- A. $\frac{52}{3}$ B. 18 C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{58}{3}$



9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \ln x, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}(x+1), & x < 1 \end{cases}$, 若 $m \neq n$, 且 $f(m) + f(n) = 2$, 则 $m+n$ 的最小值等于

- A. $4 - 2\ln 3$ B. $4 - 3\ln 2$ C. $2 - 3\ln 2$ D. $3 - 2\ln 2$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$, D 是 BC 上一点, 且 $BD = 3DC$, $AD = 3$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是

- A. $3\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

11. 已知 $f(x) = e^x - ax^2$ (a 为常数), 则下列结论

(1) 当 $a = \frac{e}{2}$ 时, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极值点

(2) 若 $f(x)$ 有 3 个零点, 则实数 a 的最小值是 $\frac{e^2}{4}$

(3) $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的零点 x_0 满足 $-1 < x_0 < -\frac{1}{2}$

正确的个数有

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

12. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, 则 $\sum_{k=1}^{4041} f\left(\frac{k}{2021}\right) =$

- A. 2020 B. 2021 C. 4041 D. 4042

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $5^a = 4^b = 10$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} =$ _____.

14. 函数 $f(x) = \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$, $x \in [0, \pi]$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是 _____.

15. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, $\cos A = \frac{3}{5}$, 若 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $x+y$ 的最大值为 _____.

16. 不等式 $\frac{e^x}{x} + ax - a \ln x \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三. 解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\cos 2B - \sin(B - \frac{\pi}{2}) = 0$.

(1) 求角 B ;

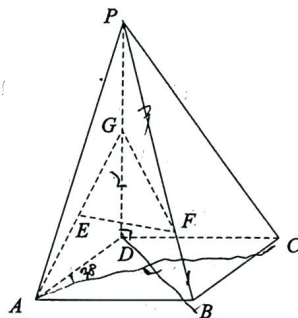
(2) 若 $b = \sqrt{7}, c = 3$, 求 $\sin A + \sin C$ 的值.

18. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $PD = 2$, G 为 PD 的中点, E 为 AG 的中点, 点 F 在线段 PB 上, 且 $PF = 3FB$.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 $ABCD$;

(2) 求 GF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



19. (12 分)

已知函数 $f(x) = xe^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $g(x) = xe^x - x - \ln x - 1$, 证明: $g(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

20. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_2 = 3, S_5 = 25$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = (2n-3) \times 2^n + 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 证明: $c_1 + c_2 + \dots + c_n < 6$.

21. (12分)

在三棱锥 $D-ABC$ 中, $AB=CD=2, BC=AD=2\sqrt{3}, BD=\sqrt{10}, \angle ABC=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$, 点 M 在 AC 上.

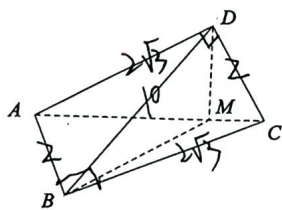


图1

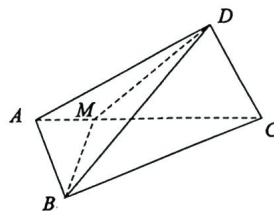


图2

(1) 若 $AM=3CM$ (如图1), 证明: $AB \perp DM$;

(2) 若二面角 $A-DM-B$ 是直二面角 (如图2), 求 $\frac{AM}{CM}$ 的值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = x - a \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x) = \frac{1}{x}$ 的图象有 3 个不同的交点, 试求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线