绝密★启用前

江苏省南京市2023届高三上学期期末模拟数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8个小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题目1 若集合 $M=\{x+1|-1\leqslant x<3\}$，$N=\{2^x|0<x\leqslant 2\}$ 则 $M\cap N=$ （ ▲ ）

A. $\{x|0\leqslant x<4\}$　B. $\{x|0<x<4\}$　C. $\{x|1\leqslant x<4\}$　D. $\{x|1<x<4\}$

题目2 若复数 z 满足 $|z-\bar{z}|=2$，$z\cdot\bar{z}=3$，则 z^2 的实部为 （ ▲ ）

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

题目3 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前5项和为75，$a_4=2a_2$，则 $a_9=$ （ ▲ ）

A. 40　B. 45　C. 50　D. 55

题目4 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(-1<X\leqslant 2)=3P(X>5)$，则 $P(-1<X\leqslant 5)=0.75=$ （ ▲ ）

A. 0.5　B. 0.625　C. 0.75　D. 0.875

题目5 若正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为2，$\sum\limits_{i=1}^{n-2}\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}=20\sqrt{3}$，则 $n=$ （ ▲ ）

A. 6　B. 8　C. 10　D. 12

题目6 已知 O 为坐标原点，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C$ 的两个焦点为 F_1，F_2，A 为 C 上一点，其横坐标为1，且 $|OA|^2=|AF_1|\cdot|AF_2|$，则 C 的离心率为 （ ▲ ）

A. $\dfrac{1}{4}$　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

题目7 若 $\sin\alpha=2\sin\beta$，$\sin(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)=1$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$ （ ▲ ）

A. 2　B. $\dfrac{3}{2}$　C. 1　D. $\dfrac{1}{2}$

题目8 若函数 $f(x)$ 的定义域为 Z，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)[f(y)+f(-y)]$，$f(-1)=0$，$f(0)=f(2)=1$，则曲线 $y=|f(x)|$ 与 $y=\log_2|x|$ 的交点个数为 （ ▲ ）

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

题目9 已知点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(2\cos\beta,\sqrt{3}\sin\beta)$，其中 $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$，则 （ ▲ ）

A. 点 A 的轨迹方程为 $x^2+y^2=1$　B. 点 B 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

C. $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{3}-1$　D. $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{3}+1$

题目 10 记函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，且 $\frac{2n\pi}{3}\leqslant T\leqslant n\pi(n\in N^{*})$. 若 $x=\frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的零点，则（ ▲ ）

A. $\frac{2}{n}\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{n}$

B. $\omega<\frac{3}{2n-1}$

C. $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的零点

D. $x=\frac{7\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的极值点

题目 11 对于伯努利数 $B_n(n\in N)$，有定义：$B_0=1,B_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_k(n\geqslant2)$. 则（ ▲ ）

A. $B_2=\frac{1}{6}$

B. $B_4=\frac{1}{30}$

C. $B_6=\frac{1}{42}$

D. $B_{2n+3}=0$

题目 12 已知函数 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2},g(x,n)=\sum_{i=1}^{n}f(x+i)\ (n\geqslant2)$，则（ ▲ ）

A. $g(x,4n)=0$

B. $g(x,4^n+2^n)+f(x)=0$

C. $g(x+1,nf(n))+f(x)=0$

D. $g(x+n,nf(n))+f(x)=0$

三、填空题：本大题共4小题，每题5分，满分20分.

题目 13 小颖和小星在玩抽卡游戏，规则如下：桌面上放有5张背面完全相同的卡牌，卡牌正面印有两种颜色的图案，其中一张为紫色，其余为蓝色. 现将这些卡牌背面朝上放置，小颖和小星轮流抽卡，每次抽一张卡，并且抽取后不放回，直至抽到印有紫色图案的卡牌停止抽卡. 若小颖先抽卡，则小星抽到紫卡的概率为__▲__.

题目 14 已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F，过点 O 的直线与 C 交于点 A，记直线 OA，FA 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $k_1=3k_2$，则 $|FA|=$__▲__.

题目 15 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形，平面 $PAB\perp$ 平面 PCD，则 $P-ABCD$ 体积的最大值为__▲__.

题目 16 若函数 $f(x)=ae^x-\sin x$，$g(x)=ae^x-x\sin x$，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 一共有三个零点，则 $a=$__▲__.

四、解答题：本大题共6小题，满分70分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

题目 17 设 (X,Y) 是一个二维离散型随机变量，其所有可能取值为 (a_i,b_j)，其中 $i,j\in N^{*}$. 记 $p_{ij}=P(X=a_i,Y=b_j)$ 是随机变量 (X,Y) 的联合分布列. 与一维的情形相似，二维分布列可以如下形式表示：

(X,Y)	b_1	b_2	…
a_1	p_{11}	p_{12}	…
a_2	p_{21}	p_{22}	…
…	…	…	…

现将3张卡片等可能地放入 A，B 两盒，记 A 盒中的卡片数为 X，B 盒中的卡片数为 Y，求 (X,Y) 的联合分布列.

题目 18 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB_1}=4,AC_1=\sqrt{6}$.

(1) 求四面体 ACB_1D_1 体积的最大值；

(2) 若二面角 $B-AC-D_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.

题目19 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，分别以a，b，c为直径的三个圆的面积依次为S_1，S_2，S_3. 已知$S_1+S_2-S_3=A+B$.

(1) 若$C=\frac{\pi}{4}$，求$\triangle ABC$的面积；

(2) 若$\triangle ABC$的面积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，求$\triangle ABC$周长的最小值.

题目20 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1$，$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$是公差为1的等差数列，$\{b_{n+1}-b_n\}$是公差为2的等差数列.

(1) 若$b_2=2$，求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 若$b_2\in N^*$，$a_n\geqslant a_{b_2}$，证明：$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<3$.

题目21 已知双曲线C：$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的准线方程为$x=\pm\frac{1}{2}$，$C$的两个焦点为$F_1$，$F_2$.

(1) 求b；

(2) 若直线l与C相切，切点为A，过F_2且垂直于l的直线与AF_1交于点B，证明：点B在定曲线上.

题目22 已知函数$f(x)=ax^2+\ln x, g(x)=2x+\frac{a}{2}\ln x$.

(1) 若$f(x)\geqslant g(x)$，求a的取值范围；

(2) 记$f(x)$的零点为$x_1,x_2(x_1<x_2)$，$g(x)$的极值点为x_0，证明：$\frac{x_1}{x_2}>4ex_0$.

姓名______________座位号______________________________

(在此卷上答题无效)

绝密★启用前

江苏省南京市2023届高三上学期期末模拟数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8个小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题目1 若集合$M=\{x+1|-1\leqslant x<3\}$，$N=\{2^x|0<x\leqslant 2\}$则$M\cap N=$　　(　　)

A. $\{x|0\leqslant x<4\}$　　B. $\{x|0<x<4\}$　　C. $\{x|1\leqslant x<4\}$　　D. $\{x|1<x<4\}$

答案 D

解析 因为$M=\{x+1|-1\leqslant x<3\}$，则$M=[0,4)$，

又因为$N=\{2^x|0<x\leqslant 2\}$，则$N=(1,4]$，

所以$M\cap N=(1,4)$.

故选：D.

题目2 若复数z满足$|z-\bar{z}|=2$，$z\cdot\bar{z}=3$，则z^2的实部为　　(　　)

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

答案 C

解析 设复数$z=x+yi,(x,y\in R)$，则$\bar{z}=x-yi$，

则由$|z-\bar{z}|=2$，$z\cdot\bar{z}=3$可得$|2yi|=2$且$x^2+y^2=3$，

解得$x^2=2,y^2=1$，

故$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$，其实部为$x^2-y^2=2-1=1$.

故选：C.

题目3 若等差数列$\{a_n\}$的前5项和为75，$a_4=2a_2$，则$a_9=$　　(　　)

A. 40　　B. 45　　C. 50　　D. 55

答案 B

解析 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

根据题意可得$\begin{cases}5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d=75\\ a_1+3d=2(a_1+d)\end{cases}$，解得$a_1=5$，$d=5$，

$\therefore a_9=a_1+8d=45$.

故选：B.

题目4 已知随机变量X服从正态分布$N(2,\sigma^2)$，且$P(-1<X\leqslant 2)=3P(X>5)$，则$P(-1<X\leqslant 5)=0.75=$　　(　　)

A. 0.5　　B. 0.625　　C. 0.75　　D. 0.875

答案 C

解析 因为$X\sim N(2,\sigma^2)$，$P(-1<X\leqslant 2)=P(2\leqslant X<5)$并且$P(X\geqslant 2)=0.5$

又因为$P(-1<X\leqslant 2)=3P(X>5)$，所以$P(X\geqslant 2)=P(2\leqslant X<5)+P(X>5)=$

$4P(X>5)=0.5$，所以 $P(X>5)=0.125$

所以 $P(2\leqslant X<5)=0.5-0.125=0.375$，所以 $P(-1<X\leqslant 5)=0.75$

故选：C

题目5 若正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 2，$\sum_{i=1}^{n-2}\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}=20\sqrt{3}$，则 $n=$　（　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

答案 D

解析 解：设正 n 边形的内角为 θ，则 $\theta=\dfrac{(n-2)\pi}{n}$，

$\therefore \overrightarrow{A_iA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}=2\times 2\cos(\pi-\theta)=-4\cos\theta$，$\sum_{i=1}^{n-2}\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}=-4(n-2)\cos\theta$

即 $-4(n-2)\cos\dfrac{(n-2)\pi}{n}=20\sqrt{3}\Rightarrow\cos\dfrac{(n-2)\pi}{n}=\dfrac{-5\sqrt{3}}{n-2}$，

当 $n=6$ 时，$\cos\dfrac{(6-2)\pi}{6}=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-5\sqrt{3}}{6-2}$，$A$ 选项错误；

当 $n=8$ 时，$\cos\dfrac{(8-2)\pi}{8}=\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\neq\dfrac{-5\sqrt{3}}{8-2}$，$B$ 选项错误；

当 $n=10$ 时，$\cos\dfrac{(10-2)\pi}{10}=\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\sin\dfrac{3\pi}{10}>-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由于 $\dfrac{-5\sqrt{3}}{8}<\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$，所以 $\cos\dfrac{4\pi}{5}\neq\dfrac{-5\sqrt{3}}{8}$，$C$ 选项错误；

当 $n=12$ 时，$\cos\dfrac{(12-2)\pi}{12}=\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-5\sqrt{3}}{12-2}$，$D$ 选项正确；

故选：D.

题目6 已知 O 为坐标原点，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C$ 的两个焦点为 F_1，F_2，A 为 C 上一点，其横坐标为 1，且 $|OA|^2=|AF_1|\cdot|AF_2|$，则 C 的离心率为　（　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

答案 D

解析 设 $A(1,y_0)$，则 $\dfrac{1}{a^2}+y_0^2=1$，即：$y_0^2=1-\dfrac{1}{a^2}$，

$\therefore |OA|^2=1+y_0^2=1+1-\dfrac{1}{a^2}=2-\dfrac{1}{a^2}$.

又 $\because |AF_1|=a+ex_0=a+e$，$|AF_2|=a-ex_0=a-e$，

$\therefore |AF_1||AF_2|=a^2-e^2$.

又 $\because |OA|^2=|AF_1||AF_2|$，

$\therefore 2-\dfrac{1}{a^2}=a^2-e^2$. ①

又 $\because e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-1}{a^2}=1-\dfrac{1}{a^2}$ ②，$a>1$ ③，

$\therefore$ 由①②③得：$a^2=2$，$e^2=\dfrac{1}{2}$.

又 $\because 0<e<1$，

$\therefore e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：D.

题目7 若 $\sin\alpha=2\sin\beta$，$\sin(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)=1$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$　（　）

A. 2　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

答案 A

解析 因为 $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$，

所以 $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}(\cos2\beta-\cos2\alpha)$，

又 $\sin(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)=1$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)\cdot\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=1$ 即 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$，

所以 $\dfrac{1}{2}(\cos2\beta-\cos2\alpha)=\cos(\alpha-\beta)$，

所以 $\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2\beta-1+2\sin^2\alpha)=\cos(\alpha-\beta)$ 即 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha-\beta)$，

又 $\sin\alpha=2\sin\beta$，

所以 $4\sin^2\beta-\sin^2\beta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，

所以 $4\sin^2\beta-\sin^2\beta=\cos\alpha\cos\beta+2\sin^2\beta$，

所以 $\sin^2\beta=\cos\alpha\cos\beta$，

所以 $\dfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$ 即 $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，

又易知 $\cos\alpha\cos\beta\neq0$，

所以 $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=2$，即 $\tan\alpha\tan\beta=2$，

故选：A

题目 8 若函数 $f(x)$ 的定义域为 Z，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)[f(y)+f(-y)]$，$f(-1)=0$，$f(0)=f(2)=1$，则曲线 $y=|f(x)|$ 与 $y=\log_2|x|$ 的交点个数为　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

答案 B

解析 由题意函数 $f(x)$ 的定义域为 Z，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)[f(y)+f(-y)]$，$f(-1)=0$，$f(0)=f(2)=1$，

令 $y=1$，则 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)[f(1)+f(-1)]=f(x)f(1)$，

令 $x=1$，则 $f(2)+f(0)=f^2(1)$，即 $f^2(1)=2$，

令 $x=2$，则 $f(3)+f(1)=f(2)f(1)$，即 $f(3)=0$，

令 $x=3$，则 $f(4)+f(2)=f(3)f(1)$，即 $f(4)=-1$，

令 $x=4$，则 $f(5)+f(3)=f(4)f(1)$，即 $f(5)=-f(1)$，

令 $x=5$，则 $f(6)+f(4)=f(5)f(1)$，即 $f(6)-1=-f^2(1)$，$\therefore f(6)=-1$，

令 $x=6$，则 $f(7)+f(5)=f(6)f(1)$，即 $f(7)-f(1)=-f(1)$，$\therefore f(7)=0$，

令 $x=7$，则 $f(8)+f(6)=f(7)f(1)$，即 $f(8)-1=0$，$\therefore f(8)=1$，

依次类推，可发现此时当 $x\in Z$，且 x 依次取 $0,1,2,3,\cdots$ 时，

函数 $y=|f(x)|$ 的值依次为 $1,\sqrt{2},1,0,1,\sqrt{2},1,0,\cdots$，即每四个值为一循环，

此时曲线 $y=|f(x)|$ 与 $y=\log_2|x|$ 的交点为 $(2,1)$；

令 $x=-1$，则 $f(0)+f(-2)=f(-1)f(1)=0$，$\therefore f(-2)=-1$，

令 $x=-2$，则 $f(-1)+f(-3)=f(-2)f(1)=-f(1)$，$\therefore f(-3)=-f(1)$，

令 $x=-3$，则 $f(-2)+f(-4)=f(-3)f(1)=-f^2(1)$，$\therefore f(-4)=-1$，

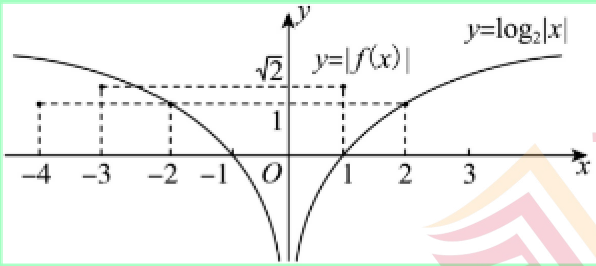
令 $x=-4$，则 $f(-3)+f(-5)=f(-4)f(1)=-f(1)$，$\therefore f(-5)=0$，

令 $x=-5$，则 $f(-4)+f(-6)=f(-5)f(1)=0$，$\therefore f(-6)=1$，

令 $x=-6$，则 $f(-5)+f(-7)=f(-6)f(1)=f(1)$，$\therefore f(-7)=f(1)$，

令 $x=-7$，则 $f(-6)+f(-8)=f(-7)f(1)=f^2(1)$，$\therefore f(-8)=1$，

依次类推，可发现此时当 $x\in Z$，且 x 依次取 $-1,-2,-3,\cdots$ 时，
函数 $y=|f(x)|$ 的值依次为 $0,1,\sqrt{2},1,0,1,\sqrt{2},1,0,\cdots$，即每四个值为一循环，
此时曲线 $y=|f(x)|$ 与 $y=\log_2|x|$ 的交点为 $(-1,0),(-2,1)$；



故综合上述，曲线 $y=|f(x)|$ 与 $y=\log_2|x|$ 的交点个数为 3，
故选：B
【点睛】难点点睛：确定曲线 $y=|f(x)|$ 与 $y=\log_2|x|$ 的交点个数，要明确函数 $y=|f(x)|$ 的性质，因此要通过赋值求得 $y=|f(x)|$ 的一些函数值，从中寻找规律，即找到函数 $y=|f(x)|$ 的函数值循环的规律特点，这是解答本题的难点所在.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

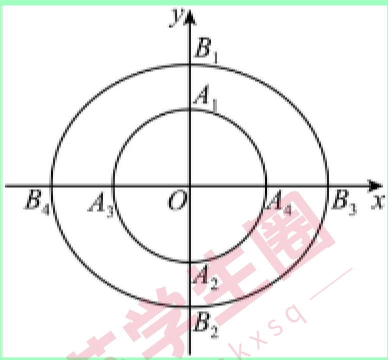
题目 9 已知点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(2\cos\beta,\sqrt{3}\sin\beta)$，其中 $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$，则 (　　)

A. 点 A 的轨迹方程为 $x^2+y^2=1$　　B. 点 B 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

C. $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{3}-1$　　D. $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{3}+1$

答案 ABC

解析 对于 A 项，将 A 点坐标代入，可得 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 成立，故 A 项正确；
对于 B 项，将 B 点坐标代入，可得 $\frac{(2\cos\beta)^2}{4}+\frac{(\sqrt{3}\sin\beta)^2}{3}=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$ 成立，故 B 项正确；
对于 C 项，A 点轨迹为以 $(0,0)$ 为圆心，1 为半径的圆.B 点轨迹为椭圆.
两者位置关系如下图：



显然 $|BO|>|AO|=1$，因为 $|AB|\geqslant||BO|-|AO||=|BO|-1$，当且仅当 A,B,O 三点共线时（如图 A_1,B_1 或 A_2,B_2），等号成立.
所以，$|AB|_{\min}=|BO|_{\min}-1$，当点 B 为短轴顶点时，取得最小值，即 $|BO|_{\min}=b=\sqrt{3}$，所以 $|AB|_{\min}=\sqrt{3}-1$，故 C 项正确；
对于 D 项，因为 $|AB|\leqslant|AO|+|BO|=|BO|+1$，当且仅当 A,B,O 三点共线时（如图 A_3,B_3 或 A_4,B_4），等号成立.
所以，$|AB|_{\max}=|BO|_{\max}+1$，当点 B 为长轴顶点时，取得最大值，$|BO|_{\max}=a=2$，所以 $|AB|_{\max}=3$，故 D 项错误.

故选：ABC.

题目 10 记函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，且 $\frac{2n\pi}{3}\leqslant T\leqslant n\pi(n\in N^*)$. 若 $x=\frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ( )

A. $\frac{2}{n}\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{n}$　　B. $\omega<\frac{3}{2n-1}$

C. $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的零点　　D. $x=\frac{7\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的极值点

答案 AD

解析 $\because T=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\frac{2n\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{\omega}\leqslant n\pi(n\in N^*)$

得 $\frac{2}{n}\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{n}$，故 A 正确；

由题意得 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=0$，

$\therefore\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，

$\therefore\omega=\frac{3}{2}+6k,k\in Z$，

又 $\because\frac{2}{n}\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{n},n\in N^*$，

则 $\because\frac{1}{3n}-\frac{1}{4}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2n}-\frac{1}{4},n\in N^*,k\in Z$，

当 $n=2$ 有唯一解 $k=0$，则 $\omega=\frac{3}{2}$，故 B 错误；

$\because f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$，

则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，故 C 错误；

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=1$，故 D 正确；

故选：AD

题目 11 对于伯努利数 $B_n(n\in N)$，有定义：$B_0=1,B_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_k(n\geqslant2)$. 则 ( )

A. $B_2=\frac{1}{6}$　　B. $B_4=\frac{1}{30}$　　C. $B_6=\frac{1}{42}$　　D. $B_{2n-1}=0$

答案 ACD

解析 由 $B_0=1,B_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_k(n\geqslant2)$ 得，

$B_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_k=C_n^0B_0+C_n^1B_1+C_n^2B_2+C_n^3B_3+\cdots\cdots+C_n^nB_n(n\geqslant2)$，

所以，$C_n^0B_0+C_n^1B_1+C_n^2B_2+C_n^3B_3+\cdots\cdots+C_n^{n-1}B_{n-1}=0(n\geqslant2)$，

同理，$C_{n+1}^0B_0+C_{n+1}^1B_1+C_{n+1}^2B_2+C_{n+1}^3B_3+\cdots\cdots+C_{n+1}^{n-1}B_{n-1}+C_{n+1}^nB_n=0(n\geqslant1)$，

所以，$C_{n+1}^nB_n=-(C_{n+1}^0B_0+C_{n+1}^1B_1+C_{n+1}^2B_2+C_{n+1}^3B_3+\cdots\cdots+C_{n+1}^{n-1}B_{n-1})(n\geqslant1)$，

$B_n=-\frac{1}{n+1}(C_{n+1}^0B_0+C_{n+1}^1B_1+C_{n+1}^2B_2+C_{n+1}^3B_3+\cdots\cdots+C_{n+1}^{n-1}B_{n-1})(n\geqslant1)$

其中第 $m+1$ 项为

$\frac{1}{n+1}C_{n+1}^mB_m=\frac{1}{n+1}\times\frac{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots(n-m+2)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\times m}B_m=$

$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+2)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\times m}B_m$

$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+2)(n-m+1)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\times m}\frac{B_m}{n-m+1}=C_n^m\frac{B_m}{n-m+1}$

即可得 $B_n=-\left(C_n^0\frac{B_0}{n+1}+C_n^1\frac{B_1}{n}+C_n^2\frac{B_2}{n-1}+\cdots\cdots+C_n^m\frac{B_m}{n-m+1}+\cdots\cdots+C_n^{n-1}B_{n-1}\right)(n\geqslant 1)$

令 $n=1$，得 $B_1=-\left(C_1^0\frac{B_0}{1+1}\right)=-\frac{1}{2}$；

令 $n=2$，得 $B_2=-\left(C_2^0\frac{B_0}{3}+C_2^1\frac{B_1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$；

令 $n=3$，得 $B_3=-\left(C_3^0\frac{B_0}{4}+C_3^1\frac{B_1}{3}+C_3^2\frac{B_2}{2}\right)=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=0$

同理，可得 $B_4=-\frac{1}{30},B_5=0,B_6=\frac{1}{42},B_7=0,B_8=-\frac{1}{30},B_9=0,B_{10}=\frac{5}{66},B_{11}=0$；

即可得选项 AC 正确，B 错误；

由上述前 12 项的值可知，当 n 为奇数时，除了 B_1 之外其余都是 0，

即 $B_{2n+1}=0(n\geqslant 1)$，也即 $B_{2n+3}=0,n\in N$；所以 D 正确.

故选：ACD.

题目 12 已知函数 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2},g(x,n)=\sum_{i=1}^{n}f(x+i)(n\geqslant 2)$，则 ( )

A. $g(x,4n)=0$

B. $g(x,4^n+2^n)+f(x)=0$

C. $g(x+1,nf(n))+f(x)=0$

D. $g(x+n,nf(n))+f(x)=0$

答案 ACD

解析 $\because g(x,n)=\sum_{i=1}^{n}f(x+i)(n\geqslant 2)$，

$\because f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$，函数的周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，

$f(x+1)+f(x+2)+f(x+3)+f(x+4)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}x-\sin\frac{\pi}{2}x-\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x=0$，

$\therefore g(x,4n)=\sum_{i=1}^{4n}f(x+i)=f(x+1)+f(x+2)+f(x+3)+f(x+4)+\ldots+f(x+4n)$

$=0\times n=0$，故 A 正确；

B. 当 $n=1$ 时，$g(x,4^1+2^1)=g(x,6)=f(x+1)+f(x+2)+\ldots+f(x+6)$

$=f(x+1)+f(x+2)=\cos\frac{\pi}{2}x-\sin\frac{\pi}{2}x$，

$\therefore g(x,4^1+2^1)+f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x-\sin\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x=\cos\frac{\pi}{2}x$ 不恒为 0，故 B 错误；

C. $\because g(x,n)=\sum_{i=1}^{n}f(x+i)(n\geqslant 2)$，

$\therefore g(x+1,nf(n))$ 中，$f(n)=1$，$n=4k+1,k\in N^*$，

$\therefore g(x+1,nf(n))=g(x+1,4k+1)=f(x+2)+f(x+3)+\ldots+f(x+4k+2)$，

由 A 的证明过程可知，相邻四项和为 0，所以 $f(x+2)+f(x+3)+\ldots+f(x+4k+2)$

$=f(x+2)=-\sin\frac{\pi}{2}x$，

$\therefore g(x+1,nf(n))+f(x)=-\sin\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x=0$，故 C 正确；

D. $g(x+n,nf(n))+f(x)=0$，由 C 的证明过程可知，

$g(x+n,nf(n))+f(x)=0$

$=f(x+4k+1+1)+f(x+4k+1+2)+f(x+4k+1+3)+\ldots$

$+f(x+4k+1+4k+1)+f(x)=f(x+2)+f(x+3)+f(x+4)+\ldots+f(x+4k+2)$

$+f(x)$

$=f(x+2)+f(x)=-\sin\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x=0$，故 D 正确.

故选：ACD

【点睛】关键点点睛：本题考查函数新定义，关键是理解 $g(x,n)=\sum_{i=1}^{n}f(x+i)\ (n\geqslant 2)$，并会展开，但重点考查三角函数的周期，利用周期求和，问题就会迎刃而解.

三、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，满分 20 分.

题目 13 小颖和小星在玩抽卡游戏，规则如下：桌面上放有 5 张背面完全相同的卡牌，卡牌正面印有两种颜色的图案，其中一张为紫色，其余为蓝色. 现将这些卡牌背面朝上放置，小颖和小星轮流抽卡，每次抽一张卡，并且抽取后不放回，直至抽到印有紫色图案的卡牌停止抽卡. 若小颖先抽卡，则小星抽到紫卡的概率为 ______.

答案 $\frac{2}{5}$##0.4

解析 按照规则，两人依次抽卡的所有情形如下表所示，

	小颖	小星	小颖	小星	小颖
情形一	紫				
情形二	蓝	紫			
情形三	蓝	蓝	紫		
情形四	蓝	蓝	蓝	紫	
情形五	蓝	蓝	蓝	蓝	紫

其中情形二和情形四为小星最终抽到紫卡，则小星抽到紫卡的概率为 $\frac{2}{5}$.

故答案为：$\frac{2}{5}$.

题目 14 已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F，过点 O 的直线与 C 交于点 A，记直线 OA，FA 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $k_1=3k_2$，则 $|FA|=$ ______.

答案 $\frac{5}{2}$##2.5

解析 首先设直线 OA 为 $y=k_1x$，与抛物线方程联立，并根据 $k_1=3k_2$，求得点 A 的坐标，利用两点间距离求 $|FA|$.

【点睛】设过原点的直线 OA 为 $y=k_1x$，联立 $\begin{cases}y=k_1x\\ y=\frac{1}{4}x^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4k_1\\ y=4k_1^2\end{cases}$，

即 $A(4k_1,4k_1^2)$，$F(0,1)$，所以 $k_2=\frac{4k_1^2-1}{4k_1}$，

因为 $k_1=3k_2$，所以 $k_1=3\times\frac{4k_1^2-1}{4k_1}$，解得：$k_1=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$，

则 $A\left(\pm\sqrt{6},\frac{3}{2}\right)$，所以 $|FA|=\sqrt{(\sqrt{6})^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$.

故答案为：$\frac{5}{2}$

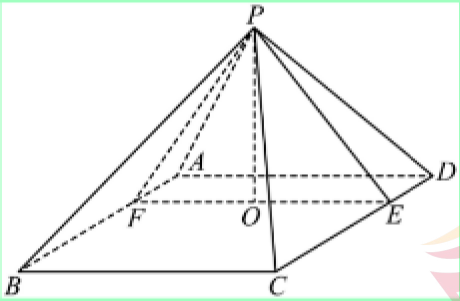
题目 15 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，平面 $PAB\perp$ 平面 PCD，则 $P-ABCD$ 体积的最大值为 ______.

答案 $\frac{4}{3}$

解析 解：由题过点 P 做 $PE\perp CD$，$PF\perp AB$ 分别交 CD，AB 于点 E，F，

过 P 做 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O，连接 OE,OF，

画图如下：



$\because PO\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PO\perp CD$，

$\because PE\perp CD, PO\subset$ 平面 $POE, PE\subset$ 平面 POE，

$\therefore CD\perp$ 平面 POE，

$\therefore CD\perp OE$，

$\because$ 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，

$\therefore CD\perp BC$，

$\because OE\subset$ 平面 $ABCD, BC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore OE\parallel BC$，

同理可得：$OF\parallel BC$，

故 O,E,F 三点共线，

且有 $EF\parallel BC, EF=BC=2$，

设平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$，

$\because AB\parallel CD, AB\subset$ 平面 $PAB, CD\subset$ 平面 PCD，

$\therefore l\parallel AB\parallel CD$，

$\because PE\perp CD, \therefore PE\perp l$，

$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PCD，平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$

$\therefore PE\perp$ 平面 PAB，

$\because PF\subset$ 平面 PAB，

$\therefore PE\perp PF$，

不妨设 $PE=x, PF=y, OF=m, OE=2-m, (0\leqslant m\leqslant 2)$，

$\therefore x^2+y^2=4$ ①，

且 $OP^2=PF^2-OF^2=PE^2-OE^2$，

即 $y^2-m^2=x^2-(2-m)^2$，

化简即：$y^2-x^2=4m-4$ ②，

联立①②可得：$y^2=2m, x^2=4-2m$，

$\therefore OP^2=y^2-m^2=2m-m^2$，

$\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times 2\times 2\times\sqrt{2m-m^2}$

$=\frac{4}{3}\sqrt{-(m-1)^2+1}, (0\leqslant m\leqslant 2)$，

当 $m=1$ 时，$V_{\max}=\frac{4}{3}$，

故 $P-ABCD$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$.

故答案为：$\frac{4}{3}$

题目16 若函数 $f(x)=ae^{x}-\sin x$，$g(x)=ae^{x}-x\sin x$，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 一共有三个零点，则 $a=$ ______.

答案 $\frac{\sin 1}{e}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

解析 当 $a<0$ 时，$f(x)=ae^{x}-\sin x<0$，$g(x)=ae^{x}-x\sin x<0$，不成立；

当 $a=0$ 时，$f(x)=-\sin x$，$g(x)=-x\sin x$，在 $[0,\pi]$ 上有 0，π 两个零点，不成立；

当 $a>0$ 时，$f(0)=a\neq 0$，$x\in(0,\pi]$ 时，$f(x)=ae^{x}-\sin x=0$，即 $ae^{x}=\sin x$；

$g(0)=a\neq 0$，当 $x\in(0,\pi]$ 时，$g(x)=ae^{x}-x\sin x=0$，即 $\frac{ae^{x}}{x}=\sin x$，

设 $F_1(x)=ae^{x}$，$F_2(x)=\sin x$，$F_3(x)=\frac{ae^{x}}{x}$，

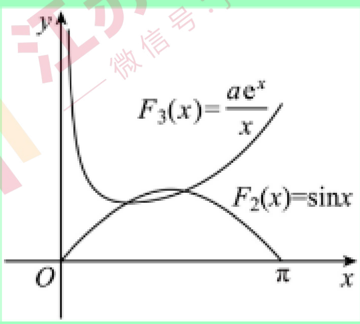
则 $F_1'(x)=ae^{x}$，$F_2'(x)=\cos x$，$F_3'(x)=\frac{ae^{x}(x-1)}{x^{2}}$

当 $F_1(x)=ae^{x}$，$F_2(x)=\sin x$ 相切时，设切点为 (x_1,y_1)，则 $\begin{cases}ae^{x_1}=\sin x_1\\ae^{x_1}=\cos x_1\end{cases}$，

解得 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$；

当 $x\in[0,1)$ 时，$F_3'(x)<0$，函数单调递减；当 $x\in(1,\pi]$ 时，$F_3'(x)>0$，函数单调递增.

画出 $F_2(x)=\sin x$，$F_3(x)=\frac{ae^{x}}{x}$ 的简图，如图所示：



$F_2(x)=\sin x$，$F_3(x)=\frac{ae^{x}}{x}$ 最多有两个交点，故 $g(x)$ 最多有 2 个零点，

当 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ 时，$f(x)$ 没有零点，$g(x)$ 最多有 2 个零点，不成立；

当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点，$F_3\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{\pi}<1=F_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)$ 有 2 个零点，成立；

现说明 $\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{\pi}<1$，即 $4e^{\pi}<\pi^{4}$，构造函数，$h(x)=4e^{x}-x^{4}$，$x\in[3,3.5]$，

$h'(x)=4e^{x}-4x^{3}=4(e^{x}-x^{3})$，设 $h_1(x)=e^{x}-x^{3}$，$h_1'(x)=e^{x}-3x^{2}$，

设 $h_2(x)=e^{x}-3x^{2}$，$h_2'(x)=e^{x}-6x$，设 $h_3(x)=e^{x}-6x$，$h_3'(x)=e^{x}-6>0$ 恒成立，故 $h_3(x)=e^{x}-6x$ 单调递增，$h_3(x)>h(3)=e^{3}-6\times 3>0$，

故 $h_2(x)=e^{x}-3x^{2}$ 单调递增，$h_2(x)<h_2(3.5)=e^{3.5}-3\times 3.5^{2}<0$，故 $h_1(x)=e^{x}-x^{3}$ 单调递减，$h_1(x)<h(3)=e^{3}-3^{3}<0$，故 $h(x)$ 函数单调递减，

$h(\pi)<h(3)=4e^{3}-3^{4}=4e^{3}-81<0$，故 $2e^{\pi}<\pi^{4}$，

当 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，$f(x)$ 有 2 零点，$g(x)$ 有 2 个零点，若 $x=1$ 是一个零点，则有两个零点重合，满足，此时 $a=\frac{\sin 1}{e}$.

综上所述：$a=\frac{\sin 1}{e}$ 或 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

故答案为：$\frac{\sin 1}{e}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

四、解答题：本大题共6小题，满分70分．解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤．

题目17 设(X,Y)是一个二维离散型随机变量，其所有可能取值为(a_i,b_j)，其中$i,j\in N^*$．记$p_{ij}=P(X=a_i,Y=b_j)$是随机变量(X,Y)的联合分布列．与一维的情形相似，二维分布列可以如下形式表示：

(X,Y)	b_1	b_2	…
a_1	p_{11}	p_{12}	…
a_2	p_{21}	p_{22}	…
…	…	…	…

现将3张卡片等可能地放入A，B两盒，记A盒中的卡片数为X，B盒中的卡片数为Y，求(X,Y)的联合分布列．

答案

(X,Y)	3	2	1	0
3	—	—	—	$\frac{1}{8}$
2	—	—	$\frac{3}{8}$	—
1	—	$\frac{3}{8}$	—	—
0	$\frac{1}{8}$	—	—	—

解析 由题意，(X,Y)的所有可能取值为$(0,3)$，$(1,2)$，$(2,1)$，$(3,0)$，

且$p_{03}=p_{30}=C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$p_{12}=p_{21}=C_3^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，

所以(X,Y)的联合分布列为：

(X,Y)	3	2	1	0
3	—	—	—	$\frac{1}{8}$
2	—	—	$\frac{3}{8}$	—
1	—	$\frac{3}{8}$	—	—
0	$\frac{1}{8}$	—	—	—

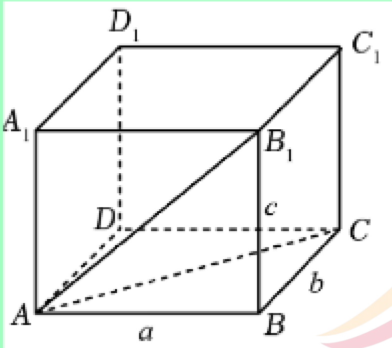
题目18 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB_1}=4$，$AC_1=\sqrt{6}$．

(1) 求四面体ACB_1D_1体积的最大值；

(2) 若二面角$B-AC-D_1$的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，求$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积．

答案 (1)$\frac{2}{3}$；

(2)2．



解析(1)

设 $AB=a$，$BC=b$，$BB_1=c$，

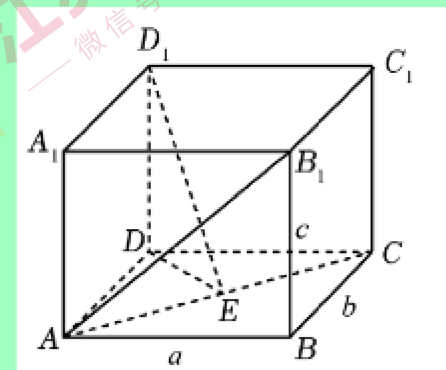
且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB_1}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|\cdot\cos\angle CAB_1$，

由余弦定理得：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB_1}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|\cdot\dfrac{|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB_1}|^2-|\overrightarrow{B_1C}|^2}{2|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|}=a^2=4$，则 $a=2$，

又 $AC_1=\sqrt{6}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，所以 $b^2+c^2=2$，

且 $V_{ACB_1D_1}=\dfrac{2}{3}bc\leqslant\dfrac{2}{3}\times\dfrac{b^2+c^2}{2}=\dfrac{2}{3}$，当且仅当 $b=c=1$ 时等号成立，

即四面体 ACB_1D_1 体积的最大值为 $\dfrac{2}{3}$；



(2)

过点 D 作 AC 的垂线，垂足为 E，连接 D_1E，

因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $DD_1\perp AC$，且 $AC\perp DE$，

又 $DE\cap DD_1=D$，$DE,DD_1\subset$ 平面 DED_1，

所以 $AC\perp$ 平面 DED_1，且 $D_1E\subset$ 平面 DED_1，

所以 $AC\perp D_1E$，即 $\angle DED_1$ 为二面角 $D-AC-D_1$ 的平面角，

记二面角 $B-AC-D_1$ 的平面角为 θ，

则二面角 $D-AC-D_1$ 的平面角为 $\pi-\theta$，

所以 $\sin\theta=\dfrac{DD_1}{D_1E}=\dfrac{\sqrt{6c^2-c^4}}{\sqrt{-c^4+2c^2+8}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

则 $(c^2-1)(c^2-10)=0$，且 $c^2<2$，所以 $c=1$，

且 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=2bc=2$，

所以 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 2.

题目 19 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，分别以 a，b，c 为直径的三个圆的面积依次为 S_1，S_2，S_3. 已知 $S_1+S_2-S_3=A+B$.

(1) 若 $C=\dfrac{\pi}{4}$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，求 $\triangle ABC$ 周长的最小值.

答案 (1)$\frac{3}{4}$

(2)$2\sqrt{6}$

解析 (1) 解:记 $\triangle ABC$ 的面积为 S,

因为 $S_1+S_2-S_3=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2-c^2)=A+B=\pi-C=\frac{3\pi}{4}$,所以 $a^2+b^2-c^2=3$,

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,所以 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C=\sqrt{2}ab=3$,则 $ab=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}$;

(2) 解:因为 $S_1+S_2-S_3=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2-c^2)=A+B=\pi-C$,得 $a^2+b^2-c^2=\frac{4(\pi-C)}{\pi}$

又由余弦定理得 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$,

所以 $ab=\frac{2(\pi-C)}{\pi\cos C}>0$,所以 $\cos C>0$,则 $0<C<\frac{\pi}{2}$,

又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\pi-C}{\pi}\tan C$,设 $f(C)=\frac{\pi-C}{\pi}\tan C$,$0<C<\frac{\pi}{2}$

所以 $f'(C)=-\frac{\tan C}{\pi}+\frac{\pi-C}{\pi\cos^2 C}=\frac{\pi-C-\frac{1}{2}\sin 2C}{\pi\cos^2 C}>0$,所以 $f(C)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增,

且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-\frac{\pi}{3}}{\pi}\tan\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,从而 $C=\frac{\pi}{3}$,所以 $ab=\frac{8}{3}$

则 $2ab\cos C=a^2+b^2-c^2=\frac{8}{3}$,

所以 $c^2=a^2+b^2-\frac{8}{3}\geqslant 2ab-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$,即 $c\geqslant\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

且 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,当且仅当 $a=b=c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时,取等号,

所以 $\triangle ABC$ 周长 $a+b+c$ 的最小值 $3\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$.

题目 20 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 是公差为1的等差数列, $\{b_{n+1}-b_n\}$ 是公差为2的等差数列.

(1) 若 $b_2=2$,求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_2\in N^*$, $a_n\geqslant a_{b_2}$,证明: $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<3$.

答案 (1)$a_n=n^3-2n^2+2n$; $b_n=(n-1)^2+1$

(2) 证明见解析

解析 (1) 解:因为 $\frac{a_1}{b_1}=1$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 是公差为1的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{b_n}=n$,

即 $a_n=nb_n$,且 $b_2-b_1=1$,

所以 $b_{n+1}-b_n=2n-1$,

累加得 $b_{n+1}-b_1=n^2$,

所以 $b_n=(n-1)^2+1$,

则 $a_n=nb_n=n^3-2n^2+2n$;

(2) 解:因为 $b_{n+1}-b_n=2n+b_2-3$,

累加得 $b_{n+1}-b_1=n^2-2n+nb_2$,

所以 $b_n=n^2-4n+4+(n-1)b_2$，

则 $a_n=n^3-4n^2+4n+n(n-1)b_2$，

则 $a_1=1,a_{b_2}=2b_2^3-5b_2^2+4b_2$，

令 $f(b_2)=2b_2^3-5b_2^2+4b_2(b_2\in N^*)$，

且 $f'(b_2)=6b_2^2-10b_2+4\geqslant 0$，

所以 $a_{b_2}\geqslant a_1$，且 $a_1\geqslant a_{b_2}$，所以 $b_2=1$，

所以 $b_n=n^2-3n+3$，

且 $b_1=b_2=1,b_n=n^2-3n+3>n^2-3n+2$，

从而 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n^2-3n+3}<\frac{1}{n^2-3n+2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}(n\geqslant 3)$，

所以 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<3-\frac{1}{n-1}<3(n\geqslant 3)$，

当 $n=1$ 时，$\frac{1}{b_1}=1<3$，$n=2$ 时，$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}=2<3$，

所以 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<3$.

题目21 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的准线方程为 $x=\pm\frac{1}{2}$，C 的两个焦点为 F_1，F_2.

(1) 求 b；

(2) 若直线 l 与 C 相切，切点为 A，过 F_2 且垂直于 l 的直线与 AF_1 交于点 B，证明：点 B 在定曲线上.

答案 (1) $b=\sqrt{3}$

(2) 证明见解析

解析 (1) 由题可知，$a^2=1$，又双曲线 C 的准线方程为 $x=\pm\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{a^2}{c}=\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$，则 $c=2$，

所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$.

(2) 由 (1) 知 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$，设点 $A(x_0,y_0)$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

首先证明：$l:x_0x-\frac{y_0y}{3}=1$，并将 l 斜率不存在的情况舍弃，即 $x_0\neq\pm1$，

联立 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 消去 x 得：$y^2-2y_0y+3x_0^2-3=0$，

且 $\Delta=4y_0^2-4(3x_0^2-3)=0$，所以 $l:x_0x-\frac{y_0y}{3}=1$，即 $y=\frac{3x_0}{y_0}x-\frac{3}{y_0}$，

所以直线 $F_2B:y=-\frac{y_0}{3x_0}(x-2)$，$F_1A:y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

联立直线 F_2B,F_1A，解得 $B\left(\frac{2-2x_0}{1+2x_0},\frac{2y_0}{1+2x_0}\right)$，且 $\frac{2-2x_0}{1+2x_0}\neq-1$，

注意到 $|AF_1|^2=(x_0+2)^2+y_0^2=(2x_0+1)^2$，

从而 $\left(\frac{x_0+2}{1+2x_0}\right)^2+\left(\frac{y_0}{1+2x_0}\right)^2=1$，

即 $\left(\frac{2x_0+4}{1+2x_0}\right)^2+\left(\frac{2y_0}{1+2x_0}\right)^2=4$，

也即 $\left(\frac{2-2x_0}{1+2x_0}+2\right)^2+\left(\frac{2y_0}{1+2x_0}\right)^2=4$

所以点 B 的轨迹方程为 $(x+2)^2+y^2=4$，其中 $x\neq-1$，

即点 B 在定曲线 $(x+2)^2+y^2=4$ 上.

题目22 已知函数 $f(x)=ax^2+\ln x, g(x)=2x+\frac{a}{2}\ln x$.

(1) 若 $f(x)\geqslant g(x)$，求 a 的取值范围；

(2) 记 $f(x)$ 的零点为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，$g(x)$ 的极值点为 x_0，证明：$\frac{x_1}{x_2}>4ex_0$.

答案 (1) $\left[\frac{4+4\ln2}{1+2\ln2},+\infty\right)$

(2) 证明见解析

解析 (1) 记 $h(x)=f(x)-g(x)=\left(1-\frac{a}{2}\right)\ln x+ax^2-2x\geqslant0$，

①当 $a\leqslant2$ 时，取 $h\left(\frac{1}{2}\right)<0$，不符条件；

②当 $a>2$ 时，$h'(x)=\frac{2ax^2-2x+1-\frac{a}{2}}{x}=\frac{(2x-1)\left(ax-1+\frac{a}{2}\right)}{x}$，

令 $h'(x)<0, h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增，

所以 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}-1\right)\ln2+\frac{a}{4}-1\geqslant0$，即 $a\geqslant\frac{4+4\ln2}{1+2\ln2}$，

则 a 的取值范围为 $\left[\frac{4+4\ln2}{1+2\ln2},+\infty\right)$；

(2) $\because g'(x)=2+\frac{a}{2x}$，

令 $g'(x)=0$，

则 $x_0=-\frac{a}{4}, 4ex_0=-ea$，

且 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$，

令 $f'(x)>0, f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$ 单调递增，在 $\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 单调递减，

且 $f\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)>0$，

$\therefore -\frac{1}{2e}<a<0$，

取 $x=1$，则 $f(1)=a<0$，

$\therefore 1<x_1<\sqrt{e}<\sqrt{-\frac{1}{2a}}<x_2$，

取 $x=-\frac{1}{ea}$，

则 $f\left(-\frac{1}{ea}\right)=\frac{1}{e^2a}+\ln\left(-\frac{1}{ea}\right)$，

记 $t=-\frac{1}{ea}, 0<t<2$，

在 $\varphi(t)=\ln t-\frac{t}{e}$ 中，$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{e}=\frac{e-t}{et}>0$，

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(0,e)$ 单调递增，

$\therefore \varphi(t)<\varphi(e)=\ln e-\frac{e}{e}=0$，

即 $f\left(-\frac{1}{ea}\right)=\frac{1}{e^2a}+\ln\left(-\frac{1}{ea}\right)<0=f(x_2)\Rightarrow-\frac{1}{ea}>x_2\Rightarrow\frac{1}{x_2}>-ea$

$\because 1<x_1<\sqrt{e}<\sqrt{-\frac{1}{2a}}<x_2$

$\therefore \frac{x_1}{x_2}>\frac{1}{x_2}$

从而 $\frac{x_1}{x_2}>\frac{1}{x_2}>-ea=4ex_0$.