2023年大连市高三适应性测试

数 学

命题人：安道波　周亚明　何艳国　　校对人：安道波

本试卷共6页．考试结束后，将答题卡交回．

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区．

2．选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚．

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效．

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑．

5．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀．

第Ⅰ卷

一.单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求．

1．已知集合M，N，满足$M=M\cup N$，则

A．$M\subseteq N$　　B．$N\subseteq M$　　C．$N\in M$　　D．$M\in N$

2．已知复数$z=\dfrac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$，i为虚数单位，则$z$的共轭复数为

A．$\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$　　B．$\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$　　C．$\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

3．设命题$p:\exists x_0>0,\sin x_0>1+\cos x_0$，则$\neg p$为

A．$\forall x\le 0,\sin x>1+\cos x$　　B．$\forall x>0,\sin x<1+\cos x$

C．$\forall x>0,\sin x\le 1+\cos x$　　D．$\forall x\le 0,\sin x\le 1+\cos x$

4．向量旋转具有反映点与点之间特殊对应关系的特征，在电子信息传导方面有重要应用.平面向量旋转公式在中学数学中用于求旋转相关点的轨迹方程具有明显优势，已知对任意平面向量$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，把$\overrightarrow{AB}$绕其起点沿逆时针方向旋转$\theta$角得到向量$\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$，叫做把点$B$绕点$A$沿逆时针方向旋转$\theta$角得到点$P$.已知平面内点$A(1,2)$，点$B(1+\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$，把点$B$绕点$A$沿顺时针方向旋转$\dfrac{\pi}{4}$后得到点$P$，则点$P$的坐标为

A．$(-2,1)$　　B．$(4,1)$　　C．$(2,-1)$　　D．$(0,-1)$

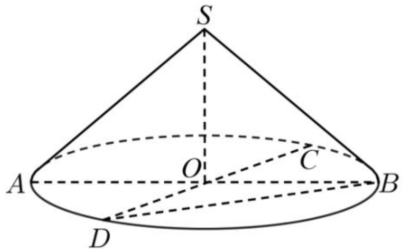
5．某产品的宣传费用x(万元）与销售额y(万元）的统计数据如表所示：

宣传费用x(万元）	2	3	4	5
销售额y（万元）	24	30	42	50

根据上表可得回归方程$\hat{y}=9x+a$，则宣传费用为 6 万元时，销售额最接近

A．55 万元　　B．60 月元　　C．62 万元　　D．65 万元

6．《几何原本》是古希腊数学家欧几里得的一部不朽之作，其第十一卷中称轴截面为等腰直角三角形的圆锥为直角圆锥.如图，若AB,CD都是直角圆锥SO底面圆的直径，$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$则异面直线SA与BD所成角的余弦值为



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{3}$

7．已知函数$f(x)$的定义域为 R，值域为$(0,+\infty)$，且$f(x-y)f(x+y)=f^2(x)$，$f(\frac{1}{2})=2$，函数$g(x)=f(x)+f(-x)$的最小值为 2，则$\sum_{k=1}^{6}f(\frac{k}{2})=$

A．12　　B．24　　C．42　　D．126

8．已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，向量$\boldsymbol{c}$满$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}$ $(0<\lambda<1)$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，记向量$\boldsymbol{c}$在向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向上的投影数量分别为$x,y$.现有两个结论：①若$\lambda=\frac{1}{3}$，则$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$；②$x^2+y^2+xy$的最大值为$\frac{3}{4}$.则正确的判断是

A．①不成立，②成立　　B．①成立，②不成立

C．①成立，②成立　　D．①不成立，②不成立

二.多项选择题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9．某城市有甲、乙两种报纸供市民订阅，记事件A为“只订甲报纸”，事件B为“至少订一种报纸”，事件C为“至多订一种报纸”，事件D为“不订甲报纸”，事件E为“一种报纸也不订”．则下列结论正确的是

A．A与C是互斥事件　　B．B与E是互斥事件，且是对立事件

C．B与C不是互斥事件　　D．C与E是互斥事件

10．已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 的直线与抛物线交于 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 两点，点 P 在 l 上的射影为 P_1，则下列结论正确的是

A．若 $x_1+x_2=6$，则 $|PQ|=8$

B．以 PQ 为直径的圆与准线 l 相切

C．设 $M(0,1)$，则 $|PM|+|PP_1|\geq\sqrt{2}$

D．过点 $M(0,1)$ 与抛物线 C 有且仅有一个公共点的直线至多有 2 条

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为 DD_1 的中点，N 为正方形 $ABCD$ 所在平面内一动点，则下列命题正确的有

A．若 $MN=2$，则线段 MN 中点 P 的轨迹所围成图形的面积为 π

B．若 N 到直线 BB_1 与到直线 DC 的距离相等，则点 N 的轨迹为抛物线

C．若直线 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，则点 N 的轨迹为双曲线

D．若直线 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，则点 N 的轨迹为椭圆

12．甲乙两队进行比赛，若双方实力随时间的变化遵循兰彻斯特模型：

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{(e^x+e^{-x})X_0}{2}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{(e^x-e^{-x})Y_0}{2} \\ y(t)=\dfrac{(e^x+e^{-x})Y_0}{2}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\dfrac{(e^x-e^{-x})X_0}{2} \\ x=\sqrt{ab}t \end{cases}$$

，其中正实数 X_0，Y_0 分别为甲、乙两方初始实力，t 为比赛时间；$x(t)$，$y(t)$ 分别为甲、乙两方 t 时刻的实力;正实数 a，b 分别为甲对乙、乙对甲的比赛效果系数．规定当甲、乙两方任何一方实力为 0 时比赛结束，另一方获得比赛胜利，并记比赛持续时长为 T．则下列结论正确的是

A．若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $x(t)>y(t)(0\leq t\leq T)$

B．若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $T=\dfrac{1}{a}\ln\sqrt{\dfrac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}}$

C．若 $\dfrac{X_0}{Y_0}>\dfrac{b}{a}$，则甲比赛胜利

D．若 $\dfrac{X_0}{Y_0}>\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，则甲比赛胜利

第II卷

三.填空题:（本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分,把答案填在答卷纸的相应位置上）

13．已知随机变量 $X \sim B(6,p)$，且 $E(X)=3$,则 $P(X=1)=$________.

14．已知 $xy>0$, 且 $x^2+2xy=1$, 则 x^2+y^2 的最小值为________.

15．定义：对于各项均为整数的数列 $\{a_n\}$，如果 a_i+i（$i=1,2,3,\cdots,n$）均为完全平方数，则称数列 $\{a_n\}$ 具有“P 性质”；不论数列 $\{a_n\}$ 是否具有“P 性质”，如果存在数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 不是同一数列，且 $\{b_n\}$ 满足下面两个条件：

（1）$b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n$ 是 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ 的一个排列；（2）数列 $\{b_n\}$ 具有“P 性质”，

则称数列 $\{a_n\}$ 具有“变换 P 性质”. 给出下面三个数列：

①数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n}{3}(n^2-1)$；②数列 $\{b_n\}$：1，2，3，4，5；

③数列 $\{c_n\}$：1，2，3，4，5，6.

具有“P 性质”的为_____；具有“变换 P 性质”的为______.（第一空 2 分，第二空 3 分）

16．已知 O 为坐标原点，F_1、F_2 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，双曲线 C 上一点 P 满足 $\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，且 $\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|=2a^2$，则双曲线 C 的渐近线方程为____________. 点 A 是双曲线 C 上一定点，过点 $B(0,1)$ 的动直线 l 与双曲线 C 交于 M,N 两点，$k_{AM}+k_{AN}$ 为定值 λ，则当 $a=\sqrt{2}$ 时实数 λ 的值为____________.（第一空 2 分，第二空 3 分）

四.解答题:(本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，$\dfrac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 一个零点.

（Ⅰ）求 ω，φ；

（Ⅱ）在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$f(\dfrac{A}{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$a=2$，

求 ΔABC 面积的最大值.

18.(本小题满分 12 分)

某大学有 A，B 两个餐厅为学生提供午餐与晚餐服务，甲、乙两位学生每天午餐和晚餐都在学校就餐，近 100 天选择餐厅就餐情况统计如下：

选择餐厅情况（午餐，晚餐）	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
甲	30 天	20 天	40 天	10 天
乙	20 天	25 天	15 天	40 天

假设甲、乙选择餐厅相互独立，用频率估计概率.

（I）分别估计一天中甲午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率，乙午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率；

（II）记 X 为甲、乙在一天中就餐餐厅的个数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（III)假设 M 表示事件“A 餐厅推出优惠套餐”，N 表示事件“某学生去 A 餐厅就餐”，$P(M)>0$，一般来说在推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大，证明：$P(M|N)>P(M|\bar{N})$.

19.（本小题满分 12 分）

在①$a_3=5$，$S_9=63$；②$3a_2=a_{10}$，$S_2=7$；③$a_1=3$，$S_8-S_6=19$这三个条件中任选一个，补充在下列问题中的横线上，并解答．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，______，数列$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列，且$b_2=a_2$.

(I)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(II)数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的所有项按照“当 n 为奇数时，b_n放在前面；当 n 为偶数时，a_n放在前面”的要求进行“交叉排列”，得到一个新数列$\{c_n\}$：b_1，a_1，a_2，b_2，b_3，a_3，a_4，b_4，…，求数列$\{c_n\}$的前$4n+3$项和T_{4n+3}.

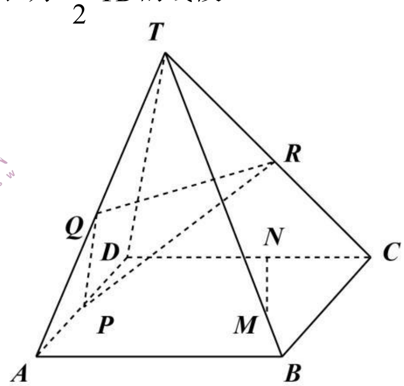
20.（本小题满分 12 分）

已知四棱锥$T-ABCD$的底面是平行四边形，平面α与直线AD，TA，TC分别交于点P，Q，R且$\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{TQ}{TA}=\dfrac{CR}{CT}=x$，点$M$在直线$TB$上，$N$为$CD$的中点，且直线$MN$//平面$\alpha$.

（I）设$\overrightarrow{TA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{TB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{TC}=\boldsymbol{c}$，试用基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$表示向量$\overrightarrow{TD}$；

（II）证明:四面体$T-ABC$中至少存在一个顶点从其出发的三条棱能够组成一个三角形;

（III）证明:对所有满足条件的平面α，点M都落在某一条长为$\dfrac{\sqrt{5}}{2}TB$的线段上.



21.（本小题满分 12 分）

已知圆$F_2:(x-1)^2+y^2=16$，定点$F_1(-1,0)$，M是圆F_2上的一动点，线段F_1M的垂直平分线交半径F_2M于点P.

（I）求P的轨迹Q的方程;

（II）若过F_1,F_2的直线l_1,l_2分别交轨迹Q与A,C和B,D，且直线l_1,l_2的斜率之积为$-\dfrac{3}{4}$，求四边形$ABCD$面积的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

（I）非零实数x，满足：$-1<x<1$.证明不等式：$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

（II）证明不等式：$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$.