

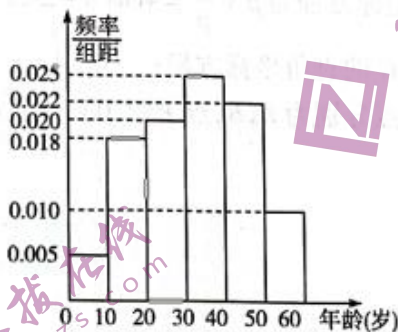
# 文科数学

## 考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

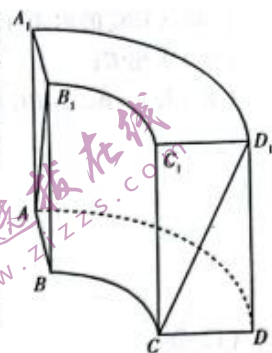
1. 已知集合  $A = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$ ,  $B = \{x | |x| \leq 3\}$ , 则  $A \cap B =$   
 A.  $\{x | -3 \leq x \leq 4\}$       B.  $\{x | -3 \leq x \leq 3\}$       C.  $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$       D.  $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$
2. 若复数  $z$  满足  $\frac{z+2i}{3+i} = -4+i$ , 则  $z$  的虚部为  
 A.  $-3i$       B.  $-3$       C.  $3i$       D.  $3$
3. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{3}{5}$ , 以  $C$  的上、下顶点和一个焦点为顶点的三角形的面积为 48, 则椭圆的长轴长为  
 A. 5      B. 10      C. 15      D. 20
4. 某市为了解市民对机动车单双号限行的看法, 随机调查了一部分市民, 其年龄(岁)统计结果如下, 则这组数据的中位数为



- A. 30      B. 32.8      C. 35.6      D. 40
5. 盈亏平衡点又称零利润点, 通常是指全部销售收入等于全部成本时(销售收入线与总成本线的交点)的销售量, 其计算公式为  $BEP(Q) = \frac{C_F}{P - C_v - T_v}$  (其中  $BEP(Q)$  为盈亏平衡点,  $C_v$  为单位产品变动成本,  $T_v$  为单位产品税金及附加,  $P$  为产品单价,  $C_F$  为总固定成本). 某企业某种产品的年固定成本为 1 800 万元, 单位产品变动成本为 600 元, 单位产品税金及附加为 200 元, 若该企业这种产品每年的盈亏平衡点为 75 000 台, 则该产品的单价为  
 A. 1 000 元      B. 1 020 元      C. 1 040 元      D. 1 060 元

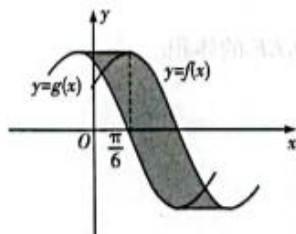
文科数学试题 第 1 页(共 4 页)

6. 已知正项数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n^2 + 3a_n = 2^n \cdot a_n + 3 \cdot 2^n$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前 10 项和  $S_{10} =$   
 A. 1 022                      B. 1 023                      C. 2 046                      D. 2 047
7. 若  $a, b$  为实数, 圆  $O_1: (x+a)^2 + y^2 = 4$  和  $O_2: x^2 + (y-b)^2 = 1$  有三条公切线, 则  $|a| + |b|$  的最大值为  
 A.  $3\sqrt{2}$                       B. 3                              C.  $2\sqrt{2}$                       D. 6
8. 在中国古代数学著作《九章算术》中记载了一种称为“曲池”的几何体, 该几何体的上、下底面平行, 且均为扇环形(扇环是指圆环被扇形截得的部分). 现有一个如图所示的曲池, 它的高为 2,  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  均与曲池的底面垂直, 底面扇环对应的两个圆的半径分别为 1 和 2, 对应的圆心角为  $90^\circ$ , 则图中异面直线  $AB_1$  与  $CD_1$  所成角的余弦值为  
 A.  $\frac{4}{5}$                               B.  $\frac{3}{5}$                               C.  $\frac{3}{4}$                               D.  $\frac{2}{3}$
9. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数,  $f(x-2)$  为偶函数, 且当  $0 < x \leq 2$  时,  $f(x) = \log_2 2x$ , 则  $f(201) + f(202) =$   
 A. 4                              B. 3                              C. 2                              D. 1
10. 已知直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的外接球表面积为  $192\pi$ ,  $BC = 2\sqrt{6}$ ,  $\angle BAC = 135^\circ$ , 则  $AA_1 =$   
 A. 4                              B.  $4\sqrt{3}$                       C. 8                              D. 12
11. 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 直线  $l: y = m (m \neq 0)$  与  $C$  的左右两支分别相交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = c (c = \sqrt{a^2 + b^2})$ , 四边形  $AF_1F_2B$  的面积为  $\frac{3\sqrt{5}}{10}c^2$ , 则双曲线的离心率为  
 A. 3                              B.  $2\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{5}$                               D. 2
12. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2x^3 - 5x + 7} - \ln|4x - 5|$ , 则使得不等式  $f(3t - 1) > f(t - 2)$  成立的  $t$  的取值范围为  
 A.  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$                       B.  $(-\frac{11}{8}, \frac{1}{2})$   
 C.  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{11}{8}, +\infty)$                       D.  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}, \frac{11}{8})$



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $a = (-6, -3)$ ,  $b = (-2, m - 1)$ , 若  $(a - 2b) \parallel a$ , 则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.
14. 已知变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 4y + 4 \geq 0, \\ x - 2y - 2 \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x + 4y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.
15. 将函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$  的图象向左平移  $\theta$  个单位长度得到函数  $g(x)$  的图象, 如图所示, 图中阴影部分的面积为  $\frac{\pi}{2}$ , 则  $\varphi =$  \_\_\_\_\_.



16. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{3}{4}$ ,  $a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{2 - a_n}$ ,  $b_n = 1 - a_n$ , 则  $b_1 b_2 + b_2 b_3 + \dots + b_{16} b_{17} =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答. 微信搜《高三答案公众号》获取更多资料

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且满足  $2c \cos C = a \cos B - b \cos(B+C)$ .

(I) 求角  $C$ ;

(II) 若  $c=6$ ,  $\triangle ABC$  的面积  $S=6b \sin B$ , 求  $S$ .

18. (12 分)

无土栽培由于具有许多优点, 在果蔬种植行业得到大力推广, 无土栽培的类型主要有水培、岩棉培和基质培三大类. 某农科院为了研究某种草莓最适合的无土栽培方式, 种植了 400 株这种草莓进行试验, 其中水培、岩棉培、基质培的株数分别为 200, 100, 100. 草莓成熟后, 按照栽培方式用分层抽样的方法抽取了 40 株作为样本, 统计其单株产量, 数据如下:

株数 \ 方式	水培	岩棉培	基质培
单株产量 (g)			
(50, 100)	$x$	4	3
[100, 150)	5	3	$z$
[150, 200)	4	2	1
[200, +∞)	1	$y$	0

(I) 求  $x, y, z$  的值;

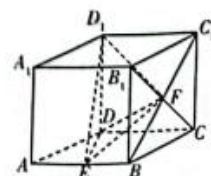
(II) 从样本中单株产量在 [150, 200) 内的草莓中随机抽取 2 株, 求这 2 株草莓中恰有 1 株草莓采用了岩棉培的概率.

19. (12 分)

如图, 在直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为菱形, 且  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $E$  为  $AB$  的中点,  $F$  为  $BC_1$  与  $B_1C$  的交点.

(I) 求证: 平面  $DEF \perp$  平面  $GDD_1C_1$ ;

(II) 若  $DD_1=AD=2$ , 求三棱锥  $D-D_1EF$  的体积.



20. (12分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点, 点  $P(t, s) (s > 0)$  为抛物线  $C$  上一点,  $P$  关于  $x$  轴对称的点为  $Q$ , 且  $\triangle OPQ$  和  $\triangle OPF$  的面积分别为 16 和 2.

(I) 求  $C$  的方程;

(II) 设点  $D(a, 2)$ ,  $A, B$  为抛物线  $C$  上不同的三点, 直线  $DA, DB$  的倾斜角分别为  $\alpha, \beta$ , 且满足  $\tan \alpha + \tan \beta = 1$ , 证明: 直线  $AB$  经过定点.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = x + ae^x - 1 (a \in \mathbf{R}), g(x) = xe^x - 2x - 2$ .

(I) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(II) 若  $f(x)$  的极大值为  $-2$ , 求证:  $f(\ln x) \leq g(x)$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$ , 以  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为

极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho + \frac{1}{\rho} = 4\cos \theta - 2\sin \theta$ .

(I) 求直线  $l$  的普通方程与曲线  $C$  的直角坐标方程;

(II) 设直线  $l$  与曲线  $C$  的两个交点分别为  $A, B$ , 点  $P(2, 0)$ , 记  $\triangle POA$  与  $\triangle POB$  的面积分别为  $S_1, S_2$ , 求

$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$  的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |4x - 1|$ .

(I) 求不等式  $f(x+1) + f(x) \geq 6$  的解集;

(II) 若函数  $y = f(x) + t^2$  的图象与函数  $y = 5t - f(x+1)$  的图象有公共点, 求实数  $t$  的取值范围.



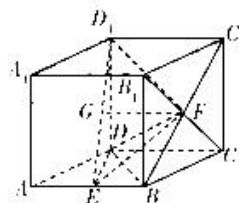
因为  $E$  为  $AB$  的中点, 所以  $DE \perp AB$ .

因为  $AB \parallel CD$ , 所以  $DE \perp CD$ . (2分)

因为  $DD_1 \perp$  平面  $ABCD$ ,  $DE \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $DD_1 \perp DE$ . (3分)

而  $DD_1 \cap DC = D$ , 且  $DD_1, DC \subset$  平面  $CDD_1C_1$ ,  $DE \not\subset$  平面  $CDD_1C_1$ , 所以  $DE \perp$  平面  $CDD_1C_1$ . (5分)

又因为  $DE \subset$  平面  $DEF$ , 所以平面  $DEF \perp$  平面  $CDD_1C_1$ . (6分)



(II) 由(I)知  $DE \perp CD$ .

因为  $DD_1 \perp$  平面  $ABCD$ ,  $DC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $DD_1 \perp DC$ .

而  $DD_1 \cap DE = D$ , 且  $DD_1, DE \subset$  平面  $D_1DE$ , 所以  $CD \perp$  平面  $D_1DE$ . (8分)

如图, 取  $D_1E$  的中点  $G$ , 连接  $GF$ .

因为  $F$  为  $BC_1$  的中点, 所以  $GF \parallel D_1C_1 \parallel DC$ , 所以  $GF \perp$  平面  $D_1DE$ . (9分)

由条件知  $DD_1 = D_1C_1 = 2, BE = 1, DE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}, FG = \frac{BE + D_1C_1}{2} = \frac{3}{2}$ . (10分)

所以三棱锥  $D - D_1EF$  的体积  $V = \frac{1}{3}S_{\triangle D_1EF} \cdot GF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (12分)

20. 解析 (I) 由题意知  $PQ = 2s$ , 所以  $\triangle OPQ$  的面积为  $\frac{1}{2} \times t \times 2s = ts$ , 则  $ts = 16$ . (1分)

又因为焦点  $F(\frac{p}{2}, 0)$ , 所以  $|OF| = \frac{p}{2}$ , 则  $\triangle OPF$  的面积为  $\frac{1}{2} \times \frac{p}{2} \times s = \frac{ps}{4}$ , 则  $\frac{ps}{4} = 2$ . (2分)

由 1, 2, 联立解得  $t = 2p, s = \frac{8}{p}$ , 则  $P(2p, \frac{8}{p})$ . (3分)

将  $P$  点坐标代入抛物线方程得  $(\frac{8}{p})^2 = 2p \cdot 2p$ , 解得  $p = 2$ . (4分)

故  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ . (5分)

(II) 由  $D(a, 2)$ , 代入抛物线  $C$  的方程得  $2^2 = 4a$ , 解得  $a = 1$ , 所以  $D(1, 2)$ . (6分)

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 直线  $AB$  的方程为  $x = my + n$ .

联立  $\begin{cases} x = my + n, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$  消去  $x$ , 得  $y^2 - 4my - 4n = 0$ . (7分)

所以  $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4n$ . (8分)

因为  $\tan \alpha + \tan \beta = 1$ , 即  $k_{DA} + k_{DB} = 1$ , 所以  $\frac{y_1 - 2}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - 2}{x_2 - 1} = 1$ . (9分)

所以  $\frac{y_1 - 2}{\frac{y_1^2}{4} - 1} + \frac{y_2 - 2}{\frac{y_2^2}{4} - 1} = \frac{4}{y_1 + 2} + \frac{4}{y_2 + 2} = 1$ , 整理得  $y_1 y_2 - 2(y_1 + y_2) - 12 = 0$ .

所以  $-4n - 2 \times 4m - 12 = 0$ , 则  $n = -2m - 3$ . (10分)

所以直线  $AB$  的方程为  $x = my - 2m - 3$ , 即  $x + 3 = m(y - 2)$ .

所以直线  $AB$  经过定点  $(-3, 2)$ .

21. 解析 (1) 由  $f(x) = x + ae^x - 1$ , 得  $f'(x) = 1 + ae^x$ . (1分)
- 当  $a \geq 0$  时,  $f'(x) \geq 0$  恒成立, 所以函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增; (2分)
- 当  $a < 0$  时, 由  $f'(x) > 0$ , 得  $x < -\ln(-a)$ , 由  $f'(x) < 0$ , 得  $x > -\ln(-a)$ ,  
所以函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln(-a))$  上单调递增, 在  $(-\ln(-a), +\infty)$  上单调递减. (4分)
- 综上所述, 当  $a \geq 0$  时,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增; 当  $a < 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln(-a))$  上单调递增, 在  $(-\ln(-a), +\infty)$  上单调递减. (5分)
- (II) 由 (1) 知  $a < 0$ , 且当  $x = -\ln(-a)$  时,  $f(x)$  取得极大值,  
所以  $f(-\ln(-a)) = -\ln(-a) + ae^{-\ln(-a)} - 1 = -2$ , 解得  $a = -1$ , (6分)
- 则  $f(x) = x - e^x - 1$ .  
要证  $f(\ln x) \leq g(x)$ , 即证  $xe^x - x - \ln x - 1 \geq 0$ . (7分)
- 令  $F(x) = xe^x - x - \ln x - 1$ , 则  $F'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x} - 1 = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$ ,  $x > 0$ .  
令  $G(x) = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$  ( $x > 0$ ), 易知  $G(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. (8分)
- 因为  $G(1) = 2(e-1) > 0$ ,  $G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}(e-2) < 0$ ,  
所以  $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使得  $G(x_0) = 0$ , 即  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ , (9分)
- 所以当  $x \in (0, x_0)$  时,  $G(x) < 0$ ; 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $G(x) > 0$ ,  
所以  $F(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增,  
所以  $F(x)_{\min} = F(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 - 1$ , (10分)
- 又因为  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ , 即  $x_0 = -\ln x_0$ , 所以  $F(x)_{\min} = 1 - x_0 + x_0 - 1 = 0$ ,  
所以  $F(x) \geq 0$ , 即  $xe^x - x - \ln x - 1 \geq 0$ , 亦即  $f(\ln x) \leq g(x)$ . (12分)
22. 解析 (1) 直线  $l$  的普通方程为  $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ . (2分)
- 曲线  $C$  的极坐标方程  $\rho + \frac{1}{\rho} = 4\cos\theta - 2\sin\theta$  可变形为  $\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta + 1 = 0$ ,  
所以  $C$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ , 即  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ . (4分)
- (II) 原点  $O$  到直线  $l: \sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$  的距离  $d = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \sqrt{3}$ , (6分)
- 所以  $S_1 = \frac{1}{2}|PA| \cdot d = \frac{\sqrt{3}}{2}|PA|$ ,  $S_2 = \frac{1}{2}|PB| \cdot d = \frac{\sqrt{3}}{2}|PB|$ .  
将直线  $l$  的参数方程代入曲线  $C$  的普通方程, 并整理得  $t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$ ,  
 $\Delta = 15 > 0$ , 设  $A, B$  两点对应的参数分别为  $t_1, t_2$ , 则  
 $t_1 + t_2 = -\sqrt{3}$ ,  $t_1 \cdot t_2 = -3$ , 且  $t_1, t_2$  异号. (8分)
- 所以  $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{2}{\sqrt{3}|PA|} + \frac{2}{\sqrt{3}|PB|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 \cdot t_2|}$   
 $= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 \cdot t_2|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 4 \times (-3)}}{1-3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ . (10分)
23. 解析 (1)  $f(x+1) + f(x) \geq 6$  即为  $14x + 31 + 14x - 11 \geq 6$ .

所以  $\begin{cases} t < -\frac{3}{4}, \\ 8x - 2 \geq 6, \end{cases}$  或  $\begin{cases} -\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ 4 \geq 6, \end{cases}$  或  $\begin{cases} t > \frac{1}{4}, \\ 8x + 2 \geq 6. \end{cases}$

解得  $x \leq -1$ , 或  $x = \emptyset$ , 或  $x \geq \frac{1}{2}$ . ..... (4分)

故原不等式的解集为  $\left\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{2}\right\}$ . ..... (5分)

(II) 由题意知方程  $f(x) + t^2 = 5t - f(x+1)$  有解,

等价于  $f(x) + f(x+1) = -t^2 + 5t$ , 即  $4x + 31 + 4x - 11 = -t^2 + 5t$  有解.

等价于函数  $y = 4x + 31 + 4x - 11$  的图象与直线  $y = -t^2 + 5t$  有公共点. .... (6分)

因为  $x = 4x + 31 + 4x - 11 \geq 4x + 3 - 4x + 11 = 4$ , ..... (8分)

所以  $-t^2 + 5t \geq 4$ , 即  $t^2 - 5t + 4 \leq 0$ , 解得  $1 \leq t \leq 4$ .

所以实数  $t$  的取值范围为  $[1, 4]$ . ..... (10分)





## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

