绝密★启用前

2020 届高三四校第一次联考

数　学（理科）参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	D	C	D	D	C	A	C	A	C	B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{2}{3}$　　14. $3\pi+\frac{24}{\pi}$　　15. $\frac{221}{6}$　　16. $-2\sqrt{2}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：（Ⅰ）设 BC_1 与 B_1C 交于点 E，连接 DE.

∵多面体 $ABC-DB_1C_1$ 是正三棱柱沿平面 DB_1C_1 切除部分所得，$BC=CC_1=2$，

∴四边形 BB_1C_1C 是正方形，且 $AC\perp AD$.

∵点 D 为 AA_1 的中点，AA_1 平行且等于 CC_1，

$\therefore CD=\sqrt{CA^2+AD^2}=\sqrt{5}$.

同理 $DB_1=\sqrt{(BB_1-AD)^2+AB^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore DB_1=CD$.

∵E 为 B_1C 的中点，

$\therefore B_1C\perp DE$. ……………………………………………………………………（4 分）

又∵$B_1C\perp BC_1$，$BC_1\cap DE=E$，

$\therefore B_1C\perp$ 平面 BC_1D；……………………………………………………………（6 分）

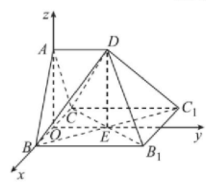
（Ⅱ）取 BC 的中点 O，连接 AO.

∵ ΔABC 为正三角形，$\therefore AO\perp BC$.

由正棱柱的性质可得，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，

且平面 $ABC\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC$，

$\therefore AO\perp$ 平面 BCC_1B_1.



以点 O 为原点，向量 $\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OA}$ 分别为 x、y、z 轴正方向

建立如图所示空间直角坐标系 $Oxyz$. ……………………………………（7 分）

则 B（1，0，0），B_1（1，2，0），C（-1，0，0），D（0，1，$\sqrt{3}$），

$\therefore CD=$（1，1，$\sqrt{3}$），$BD=$（-1，1，$\sqrt{3}$），$B_1C=$（-2，-2，0）.

设平面 CBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=$（x，y，z），

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot BD=-x+y+\sqrt{3}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot CD=x+y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令 $z=1$，得 $x=0$，$y=-\sqrt{3}$，即 $\boldsymbol{n}=$（0，$-\sqrt{3}$，1）. ………………（9 分）

由（Ⅰ）可知，平面 BC_1D 的一个法向量为 B_1C=（−2，−2，0）.（10 分）

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{n}, B_1C\rangle = \dfrac{0\times(-2)+(-\sqrt{3})\times(-2)+1\times 0}{\sqrt{1+3}\times\sqrt{4+4}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

又∵二面角 C_1-BD-C 的平面角为锐角，

∴二面角 C_1-BD-C 的平面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. ……………………（12 分）

18. 解：（Ⅰ）∵椭圆 C 的两焦点与短轴两端点围成面积为 12 的正方形，

∴由椭圆的定义和正方形的性质，可得 $\begin{cases} b=c \\ 2bc=12 \end{cases}$，…………………（1 分）

解得 $b=c=\sqrt{6}$. ……………………………………………………………（2 分）

又 $a^2=b^2+c^2=12$，………………………………………………………（3 分）

∴椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）设“卫星圆”的圆心为 (x_0, y_0)，

由“卫星圆”的定义，可得“卫星圆”的半径为 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}=3$.

∴“卫星圆”的标准方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=9$. ………………（5 分）

∵直线 $OA: y=k_1x$ 与“卫星圆”相切，

则由点到直线的距离公式可得 $\dfrac{|k_1x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}}=3$，

化简得 $(x_0^2-9)k_1^2-2x_0y_0k_1+y_0^2-9=0$. ………………………………（6 分）

同理可得 $(x_0^2-9)k_2^2-2x_0y_0k_2+y_0^2-9=0$.

∴k_1、k_2 是方程 $(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-9=0$ 的两个不相等的实数根，

∴ $x_0^2-9\neq 0$，由 $\Delta>0$，得 $x_0^2+y_0^2>9$，

将 $\dfrac{x_0^2}{12}+\dfrac{y_0^2}{6}=1$ 代入得 $x_0^2>6$，$k_1+k_2=\dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-9}$. ……………………（7 分）

又∵“卫星圆”的圆心 (x_0, y_0) 在椭圆 C 上，

$\therefore$代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 中，可得 $\dfrac{x_0^2}{12}+\dfrac{y_0^2}{6}=1$，

解得 $y_0^2=6-\dfrac{x_0^2}{2}$，

$\therefore \left(k_1+k_2\right)^2=\dfrac{4x_0^2y_0^2}{\left(x_0^2-9\right)^2}=\dfrac{4x_0^2\left(6-\dfrac{x_0^2}{2}\right)}{\left(x_0^2-9\right)^2}=\dfrac{24x_0^2-2x_0^4}{\left(x_0^2-9\right)^2}=40$．………（9 分）

当 $x_0^2=10$ 时，$y_0^2=1$；

当 $x_0^2=\dfrac{54}{7}$ 时，$y_0^2=\dfrac{15}{7}$，

$\therefore$满足条件的点 $\left(x_0,y_0\right)$ 共 8 个，

$\therefore$这样“卫星圆”存在 8 个．…………………………………………………………（12 分）

19．解：（Ⅰ）$\because$数列 $\left\{a_n\right\}$ 各项均为正数，且 $n\left(a_{n+1}+2a_n\right)\left(a_{n+1}-2a_n\right)=4a_n^2$，

$\therefore 4\left(n+1\right)a_n^2=na_{n+1}^2$，即 $2\sqrt{n+1}a_n=\sqrt{n}a_{n+1}$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}=2\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$．（1 分）

$\therefore$数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right\}$ 是以 a_1 为首项，以 2 为公比的等比数列，$\therefore \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=a_1\cdot 2^{n-1}$，

$\therefore$数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1\sqrt{n}2^{n-1}$．………………………………（2 分）

$\because a_1=1$，$\therefore$由（Ⅰ）得，$b_n=a_n^2=n\cdot 4^{n-1}$，

$\therefore T_n=1\times 4^0+2\times 4^1+3\times 4^2+\cdots+n\times 4^{n-1}$，

$4T_n=1\times 4^1+2\times 4^2+3\times 4^3+\cdots+n\times 4^n$，

两式相减，得

$$
\begin{aligned}
-3T_n&=4^0+4^1+4^2+\cdots+4^{n-1}-n\cdot 4^n\\
&=\frac{1-4^n}{1-4}-n\cdot 4^n\\
&=\frac{1-4^n}{-3}-n\cdot 4^n
\end{aligned}
$$

．……………………（4 分）

$\therefore T_n=\dfrac{(3n-1)4^n+1}{9}$．

$\therefore$数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和 $T_n=\dfrac{\left(3n-1\right)4^n+1}{9}$．…………………………（6 分）

（Ⅱ）$\because$数列$\left\{c_n\right\}$的通项c_n满足$c_n=\dfrac{b_n}{(4S)^n}$，

$\therefore$由（Ⅱ）得，$c_n=\dfrac{a_n^2}{(4S)^n}$，$\therefore c_1=\dfrac{a_1^2}{4S}$，$c_2=\dfrac{a_2^2}{16S^2}$，$c_3=\dfrac{a_3^2}{64S^3}$．（7 分）

又数列$\left\{c_n\right\}$是等差数列，$\therefore 2\dfrac{a_2^2}{16S^2}=\dfrac{a_1^2}{4S}+\dfrac{a_3^2}{64S^3}$．

$\therefore \dfrac{16a_1^2}{4S}=a_1^2+\dfrac{48a_1^2}{16S^2}$，即$s^2-4s+3=0$．

解得$s=1$或$s=3$.

又$c_n=\dfrac{na_1^2\cdot 4^{n-1}}{(4S)^n}$，

$\therefore$当$s=1$时，$c_n=\dfrac{na_1^2}{4}$，$\left\{c_n\right\}$为等差数列，$Q_n=\dfrac{n\left(\dfrac{a_1^2}{4}+\dfrac{na_1^2}{4}\right)}{2}=\dfrac{n\left(a_1^2+na_1^2\right)}{8}$．（8 分）

又对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均存在$m\in\mathrm{N}^*$，使得$8a_1^2Q_n-a_1^4n^2=16c_m$成立，

$\therefore 8a_1^2\cdot\dfrac{n\left(a_1^2+na_1^2\right)}{8}-a_1^4n^2=16\cdot\dfrac{ma_1^2}{4}$，

$\therefore na_1^2=4m$，$\therefore a_1=2\sqrt{\dfrac{m}{n}}$．……………………………………………（9 分）

又a_1为正整数，$\therefore$满足条件的所有整数a_1的值构成的集合为

$\left\{a_1\middle|a_1=2\sqrt{\dfrac{m}{n}},n\in\mathrm{N}^*,m\in\mathrm{N}^*,\sqrt{\dfrac{m}{n}}\in\mathrm{N}^*\right\}$．……………………………（10 分）

当$s=3$时，$c_n=\dfrac{na_1^2}{4\times3^n}$，$\because c_{n+1}-c_n=\dfrac{(1-2n)a_1^2}{4\times3^{n+1}}$不是常数，

$\therefore$数列$\left\{c_n\right\}$不是等差数列，舍去.

综上，满足条件的所有整数a_1的值构成的集合为

$\left\{a_1\middle|a_1=2\sqrt{\dfrac{m}{n}},n\in\mathrm{N}^*,m\in\mathrm{N}^*,\sqrt{\dfrac{m}{n}}\in\mathrm{N}^*\right\}$．……………………………（12 分）

20．解：（Ⅰ）记小球落入第 7 层第 6 个空隙处的事件为M，小球落入第 7 层第 6 个空隙处，

需要在前 6 次碰撞中有 1 次向左 5 次向右，

则 $P(M)=C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{32}$. ……………………………………………（4 分）

（Ⅱ）（i）记第 7 层从左向右的空隙编号为$\eta+1$，$\eta+1$的取值分别为 1，2，3，4，5，6，7.

则η的取值分别为 0，1，2，3，4，5，6.

且$\eta\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，球槽号记为 X.

则 X 的取值为 1，2，3，4，5，6.

$$P(X=1)=P(\eta=0)+\frac{1}{2}P(\eta=1)$$
$$=C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{1}{2}C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6;$$
$$=\frac{1}{16}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{2}P(\eta=1)+\frac{1}{2}P(\eta=2)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{2}C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4;$$
$$=\frac{21}{128}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{2}P(\eta=2)+\frac{1}{2}P(\eta=3)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{2}C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3;$$
$$=\frac{35}{128}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{2}P(\eta=3)+\frac{1}{2}P(\eta=4)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2;$$
$$=\frac{35}{128}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{2}P(\eta=4)+\frac{1}{2}P(\eta=5)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1;$$
$$=\frac{21}{128}$$

$$P(X=6)=\frac{1}{2}P(\eta=5)+P(\eta=6)$$
$$=\frac{1}{2}C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1+C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0.$$
$$=\frac{1}{16}$$

∴X的分布列为

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{1}{16}$

……………………………………………………（8 分）

（ii）ξ的可能取值为 0，5，10，15.

$$P(\xi=0)=P(X=4)=\frac{35}{128},$$
$$P(\xi=5)=P(X=3)+P(X=5)=\frac{7}{16},$$
$$P(\xi=10)=P(X=2)+P(X=6)=\frac{29}{128},$$
$$P(\xi=15)=P(X=1)=\frac{1}{16},$$
$$\therefore E(\xi)=0\times\frac{35}{128}+5\times\frac{7}{16}+10\times\frac{29}{128}+15\times\frac{1}{16}=\frac{345}{64}\approx 5.39<8.$$

∴小箐同学能盈利. ……………………………………………………（12 分）

21．解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2+x-\frac{1}{x}$，

$$\therefore f'(x)=2x+1+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3+x^2+1}{x^3},$$

①当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；……………………………（2 分）

当 $-1<x<0$ 时，记 $\varphi(x)=2x^3+x^2+1$，

$\therefore \varphi'(x)=6x^3+2x=6x\left(x+\frac{1}{3}\right)$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，

$\therefore \varphi(x)$ 单调递减，且有 $\varphi(x)>\varphi(0)=1$；

当 $x\in\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 单调递增，且 $\varphi(-1)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-1,0)$ 时，$\varphi(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

综上，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0),(0,+\infty)$；无单调递减区间.

……………………………………………（4 分）

（Ⅱ）$\because g(x)=f(x)-x^2-\ln x=ax-\frac{a}{x}-\ln x\left(a\in\mathbf{R},x>0\right)$，

$\therefore g'(x)=a+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{ax^3-x+a}{x^2}$，

$\because x_1$、x_2 是函数 $g'(x)$ 的两个零点，

$\therefore x_1$、x_2 是方程 $ax^2-x+a=0$ 的两个实数解，

由 $\Delta>0$，且 $a>\frac{e}{e^2+1}$，即 $\frac{e}{e^2+1}<a<\frac{1}{2}$，

则有 $x_1x_2=1$，

不妨设 $x_1<x_2$，

$\therefore 0<x_1<1<x_2$，

又 $\because x_1+x_2=\frac{1}{a}$，即得 $x_1+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{a}$，

$\because \frac{e}{e^2+1}<a<\frac{1}{2}$，

$\therefore 2<\frac{1}{a}<\frac{e^2+1}{e}=e+\frac{1}{e}$，

即得 $2<x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}<e+\frac{1}{e}$，从而得到 $\frac{1}{e}<x_1<1$，……………（8 分）

$\because x_1<x_2$，且 $a>\dfrac{e}{e^2+1}>0$，

$\therefore$ 由二次函数的图象及性质可知，函数 $g(x)$ 在 x_1 处取得极大值，在 x_2 处取得极小值.

$$\therefore \begin{aligned} &\left|g(x_1)-g(x_2)\right|=g(x_1)-g(x_2) \\ &=\left(ax_1-\frac{a}{x_1}-\ln x_1\right)-\left(ax_2-\frac{a}{x_2}-\ln x_2\right) \\ &=\left(ax_1-\frac{a}{x_1}-\ln x_1\right)-\left(\frac{a}{x_1}-ax_1+\ln x_1\right) \\ &=2\left(ax_1-\frac{a}{x_1}-\ln x_1\right) \qquad (*) \end{aligned}.$$

又 $\because x_1$ 为方程 $ax^2-x+a=0$ 的根，

$\therefore a=\dfrac{x_1}{x_1^2+1}$，

代入 $(*)$ 式得，

$g(x_1)-g(x_2)=2\left(\dfrac{x_2^2}{x_1^2+1}-\dfrac{1}{x_1^2+1}-\ln x_1\right)=2\left(\dfrac{x_2^2-1}{x_1^2+1}-\dfrac{1}{2}\ln x_1^2\right)$.（10 分）

令 $x_1^2=t$，则 $\dfrac{1}{e^2}<t<1$，$g(t)=2\left(\dfrac{t-1}{t+1}-\dfrac{1}{2}\ln t\right)$，

设 $h(x)=2\left(\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\ln x\right)$，$\dfrac{1}{e^2}<x<1$，

$\therefore h'(x)=\dfrac{-(x-1)^2}{x(x+1)^2}<0$，$\therefore h(x)$ 单调递减，

从而有 $0=h(1)<h(x)<h\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{4}{e^2+1}$.

$\therefore 0<g(t)<\dfrac{4}{e^2+1}$.

$\therefore 0<g(x_1)-g(x_2)<\dfrac{4}{e^2+1}$，

即 $0<\left|g(x_1)-g(x_2)\right|<\dfrac{4}{e^2+1}$ 得证. ……………………………………（12 分）

22．解：（Ⅰ）曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+(y-6)^2=2$.

由 $\rho^2=\dfrac{10}{1+9\sin^2\theta}$，$\rho^2=x^2+y^2$，$y=\rho\sin\theta$，

得 $x^2+y^2+9y^2=10$，

即 C_2 的直角坐标方程为：$\dfrac{x^2}{10}+y^2=1$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 C_1 的圆心为 A（0，6），半径 $r=\sqrt{2}$，

设 $N=\left(\sqrt{10}\cos\theta,\sin\theta\right)$，………………………………………………（6 分）

$$|NA|^2=\left(\sqrt{10}\cos\theta-0\right)^2+\left(\sin\theta-6\right)^2$$

则 $\quad=10\cos^2\theta+\sin^2\theta-12\sin\theta+36$，………………………………（8 分）

$$=-9\left(\sin\theta+\frac{2}{3}\right)^2+50$$

$\therefore$ 当 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 时，$|NA|_{\max}=5\sqrt{2}$，

$\therefore$ $|MN|$ 的最大值为 $5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}$. ………………………………（10 分）

23．解：（Ⅰ）不等式 $f(x)\geq 6$，

即为不等式 $|2x-7|+|2x-5|\geq 6$，……………………………………………（1 分）

当 $x<\dfrac{5}{2}$ 时，不等式可化为 $-(2x-7)-(2x-5)\geq 6$，解得 $x\leq\dfrac{3}{2}$；

当 $\dfrac{5}{2}\leq x\leq\dfrac{7}{2}$ 时，不等式可化为 $-(2x-7)+(2x-5)\geq 6$，即 2≥6，无解；

当 $x>\dfrac{7}{2}$ 时，不等式可化为 $(2x-7)+(2x-5)\geq 6$，解得 $x\geq\dfrac{9}{2}$.

综上，不等式 $f(x)\geq 6$ 的解集是 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{9}{2},+\infty\right)$. ………………（5 分）

（Ⅱ）$\because$ $f(x)=|2x-7|+|2x-5|\geq|2x-7-(2x-5)|=2$，

当且仅当 $(2x-7)(2x-5)\leq 0$ 时取等号，$\therefore m=2$. ……………………（7 分）

$\because$ $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\geq\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ $\dfrac{1}{a+b}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\geq\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………（8 分）

$\because k=\max\left\{\frac{1}{a+b},\frac{a^2+b^2}{a+b}\right\}>0$,

$\therefore k^2\geq\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}$,……………………………………………………（9 分）

$\therefore 2k^2\geqslant 1$，即 $k^2m\geqslant 1$．……………………………………………………（10 分）