2023年池州市普通高中高三教学质量统一监测

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	B	D	C	B	C	B

二、多项选择题：

9	10	11	12
BCD	AC	ACD	ABD

三、填空题

13. $\frac{1}{4}$　　14. 0.947　　15. $[1+\frac{1}{e},+\infty)$（或$[\frac{e+1}{e},+\infty)$）　　16. $3\sqrt{6}+6$（或$3(\sqrt{6}+2)$）

四、解答题

17. 解析：（1）由 $S_n+a_n=4$①

$\therefore S_{n-1}+a_{n-1}=4(n\ge 2)$②

①−②，得，$\therefore 2a_n-a_{n-1}=0$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}(n\ge 2)$，　　……………………………2 分

当 $n=1$ 时，$S_1+a_1=4$，$\therefore a_1=2$，　　……………………………3 分

则 $\{a_n\}$ 是以首项为 2，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n=2\times(\frac{1}{2})^{n-1}=2^{2-n}$　　…………………………5 分

（2）$\because b_n=(a_n-1)a_n=a_n^2-a_n=4^{2-n}-2^{2-n}$，　　……………………………………7 分

$\therefore T_n=\frac{4(1-4^{-n})}{1-4^{-1}}-\frac{2(1-2^{-n})}{1-2^{-1}}=\frac{4^2(1-4^{-n})}{3}-2^2(1-2^{-n})=\frac{4}{3}-\frac{4^{2-n}}{3}+2^{2-n}$．　　…………………10 分

18. 解析：（1）由 $\frac{1-a\cos B}{a\cos C-1}=\frac{2\sin B\cos C}{\sin 2C}$，得 $\frac{1-a\cos B}{a\cos C-1}=\frac{2\sin B\cos C}{2\sin C\cos C}=\frac{\sin B}{\sin C}$，　　…………………2 分

所以 $\sin C-a\sin C\cos B=a\sin B\cos C-\sin B$，

即 $\sin B+\sin C=a\sin(B+C)=a\sin A$，　　………………………………4 分

由正弦定理可得：$a^2=b+c$．　　…………………………………6 分

（2）$\because a=2$，$\therefore b+c=4$，　　……………………………………7 分

设 $\angle BAC=2\theta$，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin 2\theta=\frac{1}{2}(b+c)\cdot AD\cdot\sin\theta$，

$\therefore bc\cdot\cos\theta=\sqrt{10}$①　　……………………………………9 分

又由余弦定理可知$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos 2\theta=(b+c)^2-2bc(1+\cos 2\theta)$，

$\therefore bc\cdot\cos^2\theta=3$② ……………………………………………10 分

由①②可得，$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ ……………………………………………11 分

所以$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{4}{5}$，即$\cos\angle BAC=\dfrac{4}{5}$. ……………………………………12 分

19. 解析：(1) $\because PB\perp$底面$ABCD$，$\therefore PB\perp BE$①

又E为棱AD中点且$AD//BC$，则$BC \underline{\underline{//}} DE$，所以四边形$BCDE$为平行四边形，则$BE=DC=1$，又$DE=\dfrac{1}{2}AD=2$，$\angle DEB=60^o$，所以$DB\perp BE$② ……………………………………………3 分

由①②得$BE\perp$面PBD，所以$BE\perp PD$. ……………………………………………5 分

(2) $\because PB\perp$底面$ABCD$，由(1)知$BE\perp BD$，则以EB为x轴，BD为y轴，BP为z轴，如图建立空间直角坐标系，设$PB=a$，则$B(0,0,0),E(-1,0,0),A(-2,-\sqrt{3},0),C(1,\sqrt{3},0),P(0,0,a)$，由$PF=2FA$，可知

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AP}=(\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{a}{3})$，所以$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=(-2,-\sqrt{3},0)+(\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{a}{3})=(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{a}{3})$，

$\overrightarrow{BE}=(-1,0,0)$，设平面$BEF$的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\overrightarrow{BF}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{a}{3}z=0\\ -x=0\end{cases}$，

令$y=a$，则$z=2\sqrt{3}$，所以$\vec{m}=(0,a,2\sqrt{3})$. ……………………………………………7 分

又平面ABE的法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$，则$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+12}}$，由二面角$A-BE-F$大小为$60^o$，可知$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+12}}=\dfrac{1}{2}$，所以$a^2=36$，得$a=6$（负值舍去）. ……………………………9 分

所以$\vec{m}=(0,6,2\sqrt{3})$，又$\overrightarrow{AC}=(3,2\sqrt{3},0)$，

所以$\cos<\overrightarrow{AC},\vec{m}>=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{12\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$， ……………………………………………11 分

设直线AC与平面BEF所成角为α，则$\sin\alpha=|\cos<\overrightarrow{AC},\vec{m}>|=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，即直线$AC$与平面$BEF$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………………12 分

20. 解析：（1）由 $\sum_{i=1}^{10}x_i=380,\sum_{i=1}^{10}y_i=390$, 得 $\overline{x}=38,\overline{y}=39$， ……1 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=39-1.56\times38=-20.28$， ……2 分

由 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\hat{b}\cdot(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2)=1.56\times15^2$，

得 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{1.56\times15^2}{15\times25}=0.936$ ……4 分

则 $0.75\le|r|\le1$，所以城市居民年收入与 A 商品销售额的相关性很强. ……5 分

（2）由分层抽样可知抽取的 5 户居民中有中等收入居民 4 户，他们购买 A 商品的概率为 $\frac{1}{2}$；有高收入居民 1 户，他们购买 A 商品的概率为 $\frac{3}{4}$，分层随机抽取 5 户居民，则 z 的可能取值有 $0,1,2,3,4,5$. ……6 分

$P(z=0)=C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$，$P(z=1)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{4}+C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{3}{4}=\frac{7}{64}$，

$P(z=2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{4}+C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{3}{4}=\frac{18}{64}=\frac{9}{32}$，$P(z=3)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{4}+C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{3}{4}=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$，

$P(z=4)=C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{4}+C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{3}{4}=\frac{13}{64}$，$P(z=5)=C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

则 z 的分布列为

z	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{13}{64}$	$\frac{3}{64}$

……11 分

则 $E(z)=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{7}{64}+2\times\frac{9}{32}+3\times\frac{11}{32}+4\times\frac{13}{64}+5\times\frac{3}{64}=\frac{11}{4}$. ……12 分

21. 解析：（1）$\because\left||AF_1|-|AF_2|\right|=2a$，$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$.

$\therefore(|AF_1|-|AF_2|)^2+2|AF_1|\cdot|AF_2|=|F_1F_2|^2$，即 $S_{\Delta AF_1F_2}=b^2=4$， ……3 分

又$\because e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=5$，$\therefore a^2=1$，则双曲线 C 的方程为：$x^2-\frac{y^2}{4}=1$. ……4 分

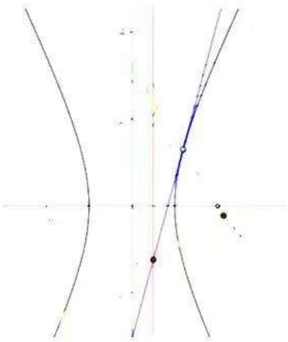
（2）法一：设 $A(x_0,y_0)$，设双曲线在点 A 处的切线为 $y=k(x-x_0)+y_0$，则联立双曲线方程：

$\begin{cases} y=k(x-x_0)+y_0 \\ 4x^2-y^2=4 \end{cases}$，得：$(4-k^2)x^2+(2k^2x_0-2ky_0)x+2kx_0y_0-k^2x_0^2-(y_0^2+4)=0$

$\therefore 4-k^2\neq 0$ 且 $\Delta=0$，$x=\dfrac{ky_0-k^2x_0}{4-k^2}=x_0$，则 $k=\dfrac{4x_0}{y_0}$

即双曲线在点 A 处的切线为 $x_0x-\dfrac{y_0y}{4}=1$. ……………………………………6 分

令 $x=\dfrac{1}{2}$，则 $y=\dfrac{2(x_0-2)}{y_0}$，即 $P(\dfrac{1}{2},\dfrac{2(x_0-2)}{y_0})$，



当 $x_0\neq 2$ 时，直线 AM 的斜率为 $k_{AM}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$，所以直线 PN 的斜率为 $k_{PN}=\dfrac{-(x_0-2)}{y_0}$.

则直线 PN 的方程为 $y-\dfrac{2(x_0-2)}{y_0}=-\dfrac{(x_0-2)}{y_0}(x-\dfrac{1}{2})$. ………………………8 分

令 $y=0$，则 $x=\dfrac{5}{2}$，所以直线 PN 过 x 轴上定点 $G(\dfrac{5}{2},0)$， ……………………9 分

当 $x_0=2$ 时，直线 PN 为 $y=0$，也过该点. ……………………………10 分

由 M,G 为两定点，且 $\angle MNG=90^o$，所以 N 点在以 MG 为直径的圆上，则存在 MG 的中点 $Q(\dfrac{9}{4},0)$，

使得 $|QN|=\dfrac{1}{4}$ 为定值，所以存在点 $Q(\dfrac{9}{4},0)$，使得 $|QN|$ 为定值. ……………………………12 分

法二：设过 $P(\dfrac{1}{2},t)$ 斜率为 k 的直线 l 方程为 $y=k(x-\dfrac{1}{2})+t$ ①，与双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ ②相切于点 $A(x_0,y_0)$，

联立①②，消 y，整理得 $(4-k^2)x^2-2k(t-\dfrac{k}{2})x-(t-\dfrac{k}{2})^2-4=0$ $\therefore 4-k^2\neq 0$ 且 $\Delta=0$，

即 $(t-\dfrac{k}{2})^2+4-k^2=0$ ③ ……………………………………5 分

此时，$x_0=\dfrac{k(t-\dfrac{k}{2})}{4-k^2}$，由③可知，$x_0=\dfrac{-k}{t-\dfrac{k}{2}}=\dfrac{-2k}{2t-k}$ ④ ……………………………………6 分

（i）当 $x_0\neq 2$ 时，直线 AM 的斜率为 $k_{AM}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$，所以直线 PN 的斜率为 $k_{PN}=\dfrac{-(x_0-2)}{y_0}$. 则直线 PN

的方程为 $y-t=-\dfrac{(x_0-2)}{y_0}(x-\dfrac{1}{2})$，即 $y-t=-\dfrac{(x_0-2)}{k(x_0-\dfrac{1}{2})+t}(x-\dfrac{1}{2})$，

由④代入化简得 $y-t=\dfrac{-4t}{-2k^2+\dfrac{1}{2}(2t-k)^2}(x-\dfrac{1}{2})$，

由③可知，$y-t=\dfrac{-4t}{-2k^2+2k^2-8}(x-\dfrac{1}{2})$，即 $y-t=-\dfrac{1}{2}t(x-\dfrac{1}{2})$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{5}{2}$，所以直线 PN 过

x 轴上定点 $G(\dfrac{5}{2},0)$. ……………………………………9 分

（ii）当$x_0=2$时，直线PN为$y=0$，也过点$G(\frac{5}{2},0)$． ……………………………………………10分

由M,G为两定点，且$\angle MNG=90^o$，所以N点在以MG为直径的圆上，则存在MG的中点$Q(\frac{9}{4},0)$，使得$|QN|=\frac{1}{4}$为定值，所以存在点$Q(\frac{9}{4},0)$，使得$|QN|$为定值． ……………………………12分

22．解析：（1）$f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax-ax\ln x\ (x>0)$，

则$g(x)=f'(x)=x+a-a(\ln x+1)=x-a\ln x$． ……………………………………1分

$\therefore g'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}(x>0)$ ……………………………………………2分

①$a\le 0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；

②$a>0$时，令$g'(x)=0$，则$x=a$，当$0<x<a$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,a)$单调递减；

当$x>a$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(a,+\infty)$单调递增． ……………………………5分

（2）证明：由（1）可知，当$a<0$时，$g(x)=f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

不妨设$0\le x_1\le x_2$，$F(x)=f(\lambda x+\mu x_2)-\lambda f(x)-\mu f(x_2)\ (0<x\le x_2)$，

$\therefore F'(x)=\lambda f'(\lambda x+\mu x_2)-\lambda f'(x)=\lambda[g(\lambda x+\mu x_2)-g(x)]$，由$\lambda x+\mu x_2\ge\lambda x+\mu x=x$且$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，可知$g(\lambda x+\mu x_2)\ge g(x)$，

$\therefore F'(x)\ge 0$，$F(x)$在$(0,x_2]$单调递增， ……………………………………9分

则$F(x_1)\le F(x_2)=f(\lambda x_2+\mu x_2)-\lambda f(x_2)-\mu f(x_2)=f(x_2)-f(x_2)=0$，

即$f(\lambda x_1+\mu x_2)\le\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$

所以当$a<0$时，$f(\lambda x_1+\mu x_2)\le\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$恒成立． ……………………………12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。