

高二理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $N = \{x | x^2 - 4x < 5\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{1, 2, 3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 复数 $(z+i)(2-i) = i$, 则 $|z| =$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

3. 已知 $p: \sin \theta = \frac{1}{2}$, $q: \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 p 是 q 的

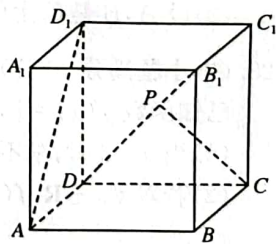
- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知锐角 α 满足 $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$, 则 $\sin^2 \alpha - 3\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \cos \alpha =$

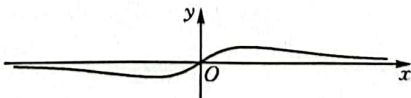
- A. -1 B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{7}{5}$

5. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为体对角线 B_1D 上一点，且 $DP = 2PB_1$, 则异面直线 AD_1 和 CP 所成角的余弦值为

- A. 0 B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



6. 如图所示为函数 $f(x)$ 的图象，则 $f(x)$ 的解析式可能是



- A. $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{x}$ B. $f(x) = x(2^x + 2^{-x})$
C. $f(x) = x(2^x - 2^{-x})$ D. $f(x) = \frac{x}{2^x + 2^{-x}}$

7. 著名数学家欧几里得著的《几何原本》中记载:任何一个大于1的整数要么是一个素数,要么可以写成一系列素数的积,例如 $42=2 \times 3 \times 7$. 对于 $1260=a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$, 其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 均是素数, 则从 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 中任选3个数, 可以组成不同三位数的个数为

- A. 60
B. 42
C. 36
D. 32

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作垂直于 x 轴的直线, 在第二象限分别交 C 及圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 于点 A, B , 若 A 为 BF_1 的中点, P 为 C 的上顶点, 则 $\angle F_1PF_2 =$

- A. 60°
B. 90°
C. 120°
D. 150°

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}]$ 上单调递减, 且 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(\frac{2\pi}{3})$, 则 $\omega =$

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

10. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 作双曲线的一条渐近线的垂线,

垂足为 M , 若 $|MF_2| = \sqrt{3}b$, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$
B. $\sqrt{3}$
C. 2
D. $\sqrt{5}$

11. 已知 $a = 1.45, b = 1.1e^{0.4}, c = e^{0.5}$, 则

- A. $a > c > b$
B. $b > c > a$
C. $c > b > a$
D. $a > b > c$

12. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 1, AA_1 = 2, E, F$ 分别是 DD_1, BB_1 的中点, 则下列结论错误的是

- A. $AF \perp BE$
B. A_1F 与平面 BC_1E 相交
C. BE 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D. $C_1E \perp FD_1$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. 已知 a, b 是两个互相垂直的单位向量, 若 $c = 2a - b$, 则 $\cos \langle b, c \rangle =$ _____.

14. 已知函数 $f(x)$ 满足: $\forall x, y \in \mathbf{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 1$. 则满足这两个条件的一个函数为 _____.

15. 在正四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面正方形的边长为2, 侧棱长为 $\sqrt{6}$, 则正四棱锥 $S - ABCD$ 的外接球的体积为 _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\frac{\sqrt{3}a}{\sin B \cos C} + \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = 0$, 则 $B =$ _____;

若 $\angle ABC$ 的角平分线与边 AC 交于点 D , 且 $BD = 4$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} =$ _____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1, a_{n+1}=\lambda a_n+4$ (λ 为常数)。

(1)若 $\lambda=3$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

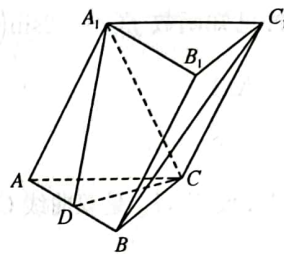
(2)若 $\lambda=1$,设数列 $\left\{\frac{1}{S_n+n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ,求证: $\forall n \in \mathbf{N}^*, T_n < 1$ 。

18. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形,平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC , D 为 AB 的中点。

(1)证明: $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD ;

(2)若 $AA_1=A_1C=2$,求二面角 $D-A_1C-A$ 的正弦值。



19. (本小题满分 12 分)

我国综合性太阳探测专用卫星“夸父一号”最新一批科学图像于 2022 年 12 月 13 日在京发布,其中多幅图像质量达到国际领先水平,验证了“夸父一号”三台有效载荷的观测能力和先进性。“夸父一号”是中国科学院空间科学二期先导专项研制的一颗空间科学卫星,于 2022 年 10 月 9 日成功发射。卫星以“一磁两暴”为科学目标,即同时观测太阳磁场和太阳上两类最剧烈的爆发现象——耀斑和日冕物质抛射,研究它们的形成、演化、相互作用和彼此关联,同时为空间天气预报提供支持。某学校为了解该校某兴趣小组对“夸父一号”探测卫星相关知识是否感兴趣,对该兴趣小组的 100 位学生进行了问卷调查。已知被调查学生中男生占调查人数的 55%,其中感兴趣的有 40 人,余下的不感兴趣,在被调查的女生中,感兴趣的有 20 人,其余人不感兴趣。

(1)请补充完整 2×2 列联表,根据 2×2 列联表,判断是否有 99.5% 的把握认为对“夸父一号”探测卫星相关知识是否感兴趣与学生的性别有关?

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生			
女生			
合计			

(2)从兴趣小组 100 人中任选 1 人, A 表示事件“选到的人是男生”, B 表示事件“选到的人对“夸父一号”探测卫星相关知识不感兴趣”,求 $P(B|A)$;

(3)从感兴趣的学生中,采用分层抽样的方法从中抽取 6 人,再从抽取的 6 人中随机抽取 2 人,随机变量 X 表示 2 人中女生的人数,求 X 的分布列和数学期望。

附:参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$ 。

临界值表:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.01	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635	7.879

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 若 $0 < a < 2e$, 证明: $f(x) < \frac{8e^{x-2}}{x}$.

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 顶点在原点, 以坐标轴为对称轴的抛物线 C 经过点 $(2, 4)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 C 关于 x 轴对称, 焦点为 F , 过点 $(4, 2)$ 且与 x 轴不垂直的直线 l 交 C 于 M, N 两点, 直线 MF 交 C 于另一点 A , 直线 NF 交 C 于另一点 B , 求证: 直线 AB 过定点.

(二) 选考题, 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所写的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=t+1, \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$ (t 为参数), 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系.

(1) 求 C 的极坐标方程;

(2) 设 A, B 是 C 上的两点, 且 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $|OA| + |OB| = \sqrt{6}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |3x-2| + |3x+a|$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;

(2) 若对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 4$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.