炎德·英才大联考长沙市一中2023届高三月考试卷(八)

数学参考答案

一、单项选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	A	B	C	B	B

1. B 【解析】$x^2<2x$,即 $x^2-2x<0$,$x(x-2)<0$,$0<x<2$,$A=\{x|0<x<2\}$,$\log_2(x-1)<1$,即 $0<x-1<2$,解得 $1<x<3$,$B=\{x|1<x<3\}$,则 $A\cap B=\{x|1<x<2\}$,故选:B.

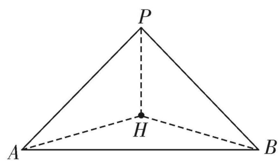
2. D 【解析】由题意得$\frac{2}{1-i}=1+i$,∵复数 z 与$\frac{2}{1-i}$对应的点关于虚轴对称,∴$z=-1+i$. 故选 D.

3. D 【解析】由题意知,直线 $y=\frac{\sqrt{m}}{3}x$ 的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$,则$\frac{\sqrt{m}}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,$\sqrt{m}=3\sqrt{3}$,故双曲线 C 的虚轴长是 $6\sqrt{3}$. 故选:D.

4. A 【解析】令 $x=1$,得$(1+1)(1-2)^7=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=-2$,
令 $x=-1$,得$(1-1)(1+2)^7=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8=0$,
两式作差得 $2(a_1+a_3+a_5+a_7)=-2$,$a_1+a_3+a_5+a_7=-1$. 故选 A.

5. B 【解析】由 $\cos A+\sin A=\cos B+\sin B$ 两边平方,得 $1+\sin 2A=1+\sin 2B$,因为 A、B 为三角形的内角,所以 $2A=2B$或 $2A+2B=\pi$,所以 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$,即 $A=B$ 或 $C=\frac{\pi}{2}$,故充分性不成立;若 $C=\frac{\pi}{2}$,则 $A+B=\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos A+\sin A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B+\cos B$,故必要性成立. 因此选 B.

6. C 【解析】如图,设烈士纪念塔顶端为 P,底端为 H,烈士纪念塔高为 h 米,
该同学第一次测量时的所处的位置为 A,第二次测量时的位置为 B,
由题意可知,$\tan\angle PAH=\frac{3}{2}$,$AB=20$,且$\angle PBH=\angle BAH=\frac{\pi}{3}$,所以 $AH=\frac{2}{3}h$,$BH=\frac{\sqrt{3}}{3}h$,在$\triangle ABH$ 中,由余弦定理可知,$BH^2=AH^2+AB^2-2AB\cdot AH\cdot\cos\angle BAH$,
即$\frac{1}{3}h^2=\frac{4}{9}h^2+400-40\cdot\frac{2}{3}h\cdot\frac{1}{2}$,解得 $h=60$. 故选:C.



7. B 【解析】设 $PA:y-2=k(x-2)(k>1)$,与抛物线方程 $C:y^2=2x$ 联立可得:
$ky^2-2y+4-4k=0$,∴$y_Ay_P=\frac{4-4k}{k}\Rightarrow y_A=\frac{2-2k}{k}$,用$-k$ 代 k 可得:$y_B=-\frac{2+2k}{k}$,
因此,$k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_A-y_B}{\frac{y_A^2}{2}-\frac{y_B^2}{2}}=\frac{2}{y_A+y_B}=-\frac{1}{2}$,即 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$. 故选 B.

8. B 【解析】$g'(x)=\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$. ∵函数 $g(x)$在$[t,+\infty)(t\in\mathbf{N}^*)$上存在极值,∴方程 $g'(x)=0$ 在$[t,+\infty)(t\in\mathbf{N}^*)$上有解,即方程 $1+\frac{1}{x}-\ln x=0$ 在$[t,+\infty)(t\in\mathbf{N}^*)$上有解. 令 $\varphi(x)=1+\frac{1}{x}-\ln x(x>0)$,易知函数$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. ∴$\varphi(3)=\frac{4}{3}-\ln 3=\frac{1}{3}\ln\frac{e^4}{27}>\frac{1}{3}\ln\frac{2.5^4}{27}>0$,$\varphi(4)=\frac{5}{4}-\ln 4=\frac{1}{4}\ln\frac{e^5}{256}<\frac{1}{4}\ln\frac{3^5}{256}<0$,∴函数$\varphi(x)$的零点 $x_0\in(3,4)$. ∵方程 $\varphi(x)=0$ 在$[t,+\infty)(t\in\mathbf{N}^*)$上有解,$t\in\mathbf{N}^*$,∴$t\leqslant 3$,∴$t$ 的最大值为 3,故选 B.

二、多项选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.)

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	AD	ACD

9. BC 【解析】由题知 $\lambda=a+b,\mu=\sqrt{3ab}$,所以 $\lambda^2-\mu^2=a^2+b^2-ab\geqslant 2ab-ab=ab$,当且仅当 $a=b$ 时取等,因为 $a,b\in(0,+\infty)$,所以 $ab>0$,即 $\lambda^2-\mu^2\geqslant ab>0$,故 $\lambda>\mu$,即选项A错误,选项B正确;

因为 $a,b\in(0,+\infty)$,所以 $\dfrac{\mu}{\lambda}=\dfrac{\sqrt{3ab}}{a+b}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,当且仅当 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$,即 $a=b$ 时取等号,

所以可得 $\dfrac{\mu}{\lambda}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,故选项C正确,选项D错误.故选:BC.

10. ABD 【解析】由 $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ 得 $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{a_n}{a_n-1}=\dfrac{1}{a_n-1}+1$,所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=1$,又 $\dfrac{1}{a_1-1}=1$,

所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ 是首项为1,公差为1的等差数列,所以 $\dfrac{1}{a_n-1}=1+(n-1)=n$,所以 $a_n=\dfrac{1}{n}+1$.因为 $\dfrac{1}{n}+1>1$,故A正确,B正确;对于C,因为对任意正整数 n 都有 $1<a_n\leqslant a_1$,即 $1<a_n\leqslant 2$,所以 $2a_{2n}>2$,所以不存在正整数 n,使得 $a_n=2a_{2n}$,故C错误;对于D,因为 $|a_{n+1}-a_n|=\dfrac{1}{n(n+1)}$,随着正整数 n 的增加,$\dfrac{1}{n(n+1)}$ 不断减小,并趋近于零,故对任意小的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0\in\mathbf{N}$,使得 $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon(n>n_0)$,D正确.

故选:ABD.

11. AD 【解析】$A(-2,0)$,以 AP 为直径的圆与圆 C 相切,

设 $P(m,m+2)$,所以以 AP 为直径的圆圆心为 $\left(\dfrac{m-2}{2},\dfrac{m+2}{2}\right)$,半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}|m+2|$,

因此外切时:$\dfrac{\sqrt{2}}{2}|m+2|+\sqrt{2}=\sqrt{\left(\dfrac{m-6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2}$,$\therefore m=\dfrac{1}{3}$,

内切时:$\dfrac{\sqrt{2}}{2}|m+2|-\sqrt{2}=\sqrt{\left(\dfrac{m-6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2}$,$\therefore m=5$,故选AD.

12. ACD 【解析】当 $n=1$ 时,$P(X=0)=\dfrac{1}{2}$,$P(X=1)=\dfrac{1}{2}$,$E(X)=\dfrac{1}{2}$,$E(X^2)=\dfrac{1}{2}$,

则 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{1}{4}$,A正确;

当 $n=2$ 时,$P(X=1)=2C_4^1\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{2}$,B错误;

由已知得 $P(X=k)=2C_{2n}^k\dfrac{1}{2^{2n}}$,$P(X=k+1)=2C_{2n}^{k+1}\dfrac{1}{2^{2n}}$,$k\leqslant n-1$,

$P(X=n)=\dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$,又有 $\dfrac{2C_{2n}^{n-1}}{C_{2n}^n}=\dfrac{2n}{n+1}>1$,所以 $P(X=n-1)>P(X=n)$,C正确;

又 $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{2kC_{2n}^k}{2^{2n}}+\dfrac{nC_{2n}^n}{2^{2n}}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2kC_{2n}^k}{2^{2n}}-\dfrac{nC_{2n}^n}{2^{2n}}$

$=\dfrac{1}{2^{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}2kC_{2n}^k-nC_{2n}^n\right)=\dfrac{1}{2^{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}4nC_{2n-1}^{k-1}-nC_{2n}^n\right)=\dfrac{n}{2^{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}4C_{2n-1}^{k-1}-C_{2n}^n\right)$

$=\dfrac{n}{2^{2n}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}4C_{2n-1}^{k}-C_{2n}^n\right)=\dfrac{n}{2^{2n}}\left(4\times\dfrac{2^{2n-1}}{2}-C_{2n}^n\right)=\dfrac{n(2^{2n}-C_{2n}^n)}{2^{2n}}$,D正确.故选:ACD.

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. $(x-2)^2$ 【解析】函数 $f(x)$ 的图象在区间 $(1,3)$ 上连续不断,能说明"若 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上存在零点,则 $f(1)\cdot f(3)<0$"为假命题,可知函数 $f(x)$ 满足在 $(1,3)$ 上存在零点,且 $f(1)\cdot f(3)\geqslant 0$,所以满足题意的函数解析式可以为 $f(x)=(x-2)^2$.故答案为:$(x-2)^2$(答案不唯一).

14. 10 【解析】由题意可知,取 $\varepsilon=20$,则 $P(|\xi-80|\geqslant 20)\leqslant\frac{4^2}{400}=0.04$,所以分数不低于100分的学生不超过 $500\times 0.02=10$ 人.故答案为:10.

15. $2\sqrt{3}$ 【解析】设与 x 轴方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}_1$,与 y 轴方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}_2$,则 $\overrightarrow{OM}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,

则 $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos\theta=\frac{1}{2}$,

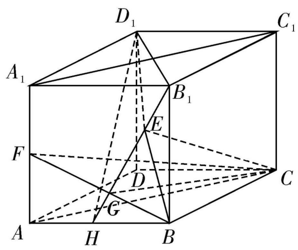
所以 $|\overrightarrow{NM}|^2=(2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)^2=4\boldsymbol{e}_1^2+4\boldsymbol{e}_2^2-8\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=4$,所以 $|MN|=2$,

$|\overrightarrow{OM}|^2=(3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2=9\boldsymbol{e}_1^2+6\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2=13$,所以 $|OM|=\sqrt{13}$,

$|\overrightarrow{ON}|^2=(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)^2=\boldsymbol{e}_1^2+6\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+9\boldsymbol{e}_2^2=13$,所以 $|ON|=\sqrt{13}$,

故 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{(\sqrt{13})^2-1}=2\sqrt{3}$.故答案为:$2\sqrt{3}$.

16. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ 【解析】取 AB 的中点 H,连接 B_1H,设 $BF\cap B_1H=G$.如图所示.易得 $B_1D_1\perp A_1C_1$,$B_1D_1\perp AA_1$,所以 $B_1D_1\perp$ 平面 AA_1C_1C,所以 $B_1D_1\perp CF$.易得 $B_1H\perp BF$,$B_1H\perp BC$,所以 $B_1H\perp$ 平面 BCF,所以 $B_1H\perp CF$.故 $CF\perp$ 平面 B_1D_1H,所以 E 在直线 B_1H 上,可使得 $CF\perp D_1E$.由于 $BC\perp BE$,所以 BE 最短时,$\triangle EBC$ 的面积取得最小值,此时 E 点在点 G 的位置.此时 $BE\perp B_1H$,$BE\perp B_1C_1$,所以 $BE\perp$ 平面 B_1C_1H,所以 $BE\perp EC_1$,所以此时三棱锥 $E\text{-}BCC_1$ 外接球的球心即为四边形 B_1BCC_1 的中心,半径等于 $\sqrt{2}$,体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.



四、解答题(本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.【解析】由题意得:$f(x)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}$

$=\sin x+\sqrt{3}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,

(1)由题可知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$,又 $\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$,且 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$,

从而 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$. ………………………… 5分

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$,所以 $\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,

所以当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时,$f(x)$ 的最小值为1;当 $x=\frac{\pi}{6}$,$f(x)$ 的最大值为2,所以 $1\leqslant f(x)\leqslant 2$.

由题意得,$-3\leqslant f(x)-m\leqslant 3$,所以 $m-3\leqslant f(x)\leqslant m+3$ 对一切 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 恒成立,

所以 $\begin{cases}m-3\leqslant 1,\\ m+3\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m\leqslant 4$,

所以整数 m 的最大值为 4. ………………………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) $2na_n-2S_n=n^2-n$ ①,

当 $n\geqslant 2$ 时, $2(n-1)a_{n-1}-2S_{n-1}=(n-1)^2-(n-1)$ ②,

①-②得: $2na_n-2(n-1)a_{n-1}-2(S_n-S_{n-1})=n^2-(n-1)^2-n+(n-1)$,

即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$,

所以 $a_n-a_{n-1}=1$, $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列. …………………… 6 分

(2)由(1)得, $a_n=n$, 因此 $b_n=\dfrac{2-n}{2^n}$,

方法一(错位相减):

故 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{2-1}{2^1}+\dfrac{2-2}{2^2}+\cdots+\dfrac{2-n}{2^n}$,

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{2-1}{2^2}+\dfrac{2-2}{2^3}+\cdots+\dfrac{2-n}{2^{n+1}}$,

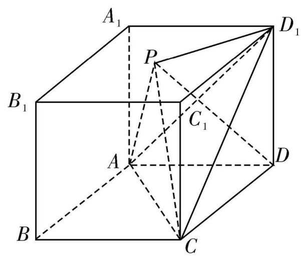
$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{-1}{2^2}+\cdots+\dfrac{-1}{2^n}-\dfrac{2-n}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{2-n}{2^{n+1}}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$,

所以 $T_n=\dfrac{n}{2^n}$.

方法二(裂项相消): 所以 $b_n=\dfrac{2-n}{2^n}=\dfrac{n-2(n-1)}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}-\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$,

因此 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\dfrac{1}{2^1}-\dfrac{0}{2^0}\right)+\left(\dfrac{2}{2^2}-\dfrac{1}{2^1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{n}{2^n}-\dfrac{n-1}{2^{n-1}}\right)=\dfrac{n}{2^n}$. ………………………… 12 分

19.【解析】(1)证明: 连接 AC,



因为 $\angle APC$ 是二面角 $A-PD_1-C$ 的平面角,

所以 $D_1P\perp AP$, $D_1P\perp CP$,

又 $CP\cap AP=P$, CP、$AP\subset$ 平面 CAP, 所以 $D_1P\perp$ 平面 PAC,

又 $AC\subset$ 平面 PAC, 所以 $D_1P\perp AC$,

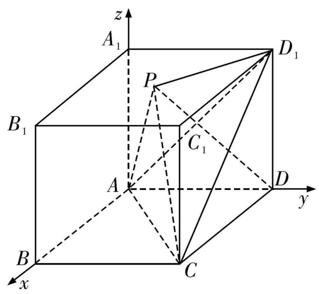
又 $D_1P\perp CC_1$, $CC_1\cap AC=C$, CC_1、$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1,

所以 $D_1P\perp$ 平面 ACC_1A_1,

因此平面 ACC_1A_1 与平面 PAC 重合, 故 $P\in$ 平面 ACC_1A_1,

又 $P\in$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $P\in$(平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$), 即 $P\in A_1C_1$. ……………… 6 分

(2)当 $AB=BC$ 时, 矩形 $ABCD$ 为正方形,



此时 P 为 A_1C_1 中点, 不妨设 $AB=2$, $AA_1=h$,

以 A 为坐标原点, AB、AD、AA_1 分别为 x、y、z 轴建立如图空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $P(1,1,h)$,

故 $\overrightarrow{AP}=(1,1,h)$, $\overrightarrow{DP}=(1,-1,h)$, $\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$,

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-y+hz=0,\\ 2x=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(0,h,1)$,

因此直线 PA 与平面 PCD 所成角 θ 的正弦值为

$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot \boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2h}{\sqrt{h^2+2}\cdot\sqrt{h^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{h^2+\dfrac{2}{h^2}+3}}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=2(\sqrt{2}-1)$，

当 $h^2=\sqrt{2}$ 时，取最大值 $2(\sqrt{2}-1)$. ………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)证明：因为 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$，$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})$，

所以 $\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(B|A)}=\dfrac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(B)\cdot P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(B|A)}=\dfrac{P(AB)}{P(\overline{A}B)}\cdot\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(B|A)}=\dfrac{P(A)}{P(\overline{A})}$， ……………………… 4 分

(2)(ⅰ)记事件 A=“检查结果呈阳性”，事件 B=“被检查者患有肺癌”，

由题意可知：$P(B)=\dfrac{1}{100}$，$P(\overline{B})=\dfrac{99}{100}$，$P(A|B)=\dfrac{99}{100}$，$P(A|\overline{B})=\dfrac{1}{100}$，

由贝叶斯公式得 $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\dfrac{\dfrac{1}{100}\times\dfrac{99}{100}}{\dfrac{1}{100}\times\dfrac{99}{100}+\dfrac{99}{100}\times\dfrac{1}{100}}=\dfrac{1}{2}$，

因此某烟民的检验结果为阳性，他真的患肺癌的概率是 $\dfrac{1}{2}$； ………………………………………… 9 分

(ⅱ)同(ⅰ)，$P=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{99}{100}}{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{99}{100}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{100}}=\dfrac{99}{100}$. ………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)$f'(x)=e^x-t$，$x\in\mathbf{R}$，

①$t<0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $f(x)$ 至多有一个零点，

又 $f(0)=1$，且 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，故 $\exists x_0\in(-\infty,0)$，使 $f(x_0)=0$；

②$t=0$ 时，$f(x)=e^x$ 无零点；

③$t>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln t$，则 $x\in(-\infty,\ln t)$，$f'(x)<0$；$x\in(\ln t,+\infty)$，$f'(x)>0$；$f(x)$ 有且仅有一个零点，仅当 $f(\ln t)=t-t\ln t=0$ 时成立，得 $t=e$，

综上，t 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup\{e\}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)①$t=1$ 时，设 $G(x)=f(x)-f(a)-(x-a)(e^x-1)$，$x\geqslant a$，

则 $G'(x)=-(x-a)e^x\leqslant 0$，

当 $x>a$ 时，$G(x)<G(a)=0$，从而 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<e^x-1(x>a)$，从而 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<e^b-1$；

②设 $H(x)=f(b)-f(x)-(b-x)(e^x-1)$，$0<x\leqslant b$，

同证，当 $x<b$ 时，$H(x)>H(b)=0$.

得 $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}>e^x-1$，$0<x<b$，

可得 $e^a-1<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<e^b-1$，

易证 $\varphi(x)=e^x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $e^a-1<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=e^{\xi}-1<e^b-1$. ……………………………………… 12 分

22.【解析】(1)延长 F_1H 交 PF_2 于点 Q，则 $|OH|=\dfrac{1}{2}|QF_2|=\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|)=a$，

得 $a=2\sqrt{2}$，又 $4a=8c$，得 $c=\sqrt{2}$，故 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{6}$，

易得椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)令$\frac{|AF_2|}{|BF_2|}=\lambda$，则$\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$，且$\lambda\neq1$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases}x_1=\sqrt{2}(\lambda+1)-\lambda x_2,\\ y_1=-\lambda y_2,\end{cases}$代入椭圆方程得$(\lambda+1)(5\lambda-3-\sqrt{2}\lambda x_2)=0$，

从而$\lambda=\frac{3}{5-\sqrt{2}x_2}$， ①

由条件可知，$\frac{|MB|}{|MA|}=\frac{|F_2B|}{|F_2A|}=\frac{|NB|}{|NA|}$，故$M,F_2,N$在以$A,B$为定点的阿波罗尼斯圆上，

设圆半径为r，则$\frac{|BF_2|}{|AF_2|}=\frac{2r+|BF_2|}{2r-|AF_2|}$，

得$r=\frac{1}{\frac{1}{|AF_2|}-\frac{1}{|BF_2|}}$，从而$\frac{1}{|AF_2|}-\frac{1}{|BF_2|}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$，

而$|BF_2|=2\sqrt{2}-\frac{1}{2}x_2$，

$\therefore\frac{1}{|AF_2|}-\frac{1}{|BF_2|}=\frac{1}{\lambda|BF_2|}-\frac{1}{|BF_2|}=\frac{5-\sqrt{2}x_2}{3(2\sqrt{2}-\frac{1}{2}x_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}-\frac{1}{2}x_2}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$，

得$x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=-\frac{3\sqrt{10}}{4}$，则$k=\frac{-y_2}{\sqrt{2}-x_2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore$直线m的方程为$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{\sqrt{10}}{2}$. …………………………………………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。