2023 届高三年级第二次模拟考试

理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 D

命题意图 本题考查集合的运算.

解析 因为 $\exists x\in\mathbf{R}, x^2-ax+\frac{1}{4}<0$,所以 $a^2-1>0$,所以 $a>1$ 或 $a<-1$,所以 $B=\{a\mid a>1$ 或 $a<-1\}$. 所以 $A\cap B=[-2,-1)$.

2. 答案 C

命题意图 本题考查复数的运算及复数的几何意义.

解析 由题可知 $z=1-\mathrm{i}$,则$\frac{3+\mathrm{i}}{z}=\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+2\mathrm{i}$.

3. 答案 A

命题意图 本题考查等差数列的性质.

解析 由 $a_1+a_3+a_5=12$ 得 $3a_3=12, a_3=4$,$\therefore d=\frac{a_{12}-a_3}{12-3}=\frac{22-4}{12-3}=2$.

4. 答案 C

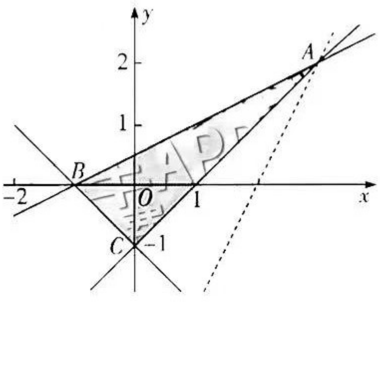
命题意图 本题考查相关指数及误差的应用.

解析 比较相关指数可知,可选 C,D,观察误差平方和和均方根值,可知 C 的拟合效果最好.

5. 答案 B

命题意图 本题考查线性规划.

解析 画出约束条件表示的平面区域,如图中阴影部分所示. 目标函数 $z=-2x+y$,即 $y=2x+z$,平移直线 $y=2x+z$,当其过点 A 时纵截距最小,即 z 最小. 由 $\begin{cases}x-y-1=0,\\x-2y+1=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ 即点 $A(3,2)$,所以 $z_{\min}=-2\times3+2=-4$.



6. 答案 D

命题意图 本题考查二项式定理.

解析 由$\begin{cases}C_8^r\cdot2^{8-r}\geqslant C_8^{r+1}\cdot2^{7-r},\\C_8^r\cdot2^{8-r}\geqslant C_8^{r-1}\cdot2^{9-r},\end{cases}$ 可得 $2\leqslant r\leqslant3$. 因为 $C_8^2\cdot2^6=C_8^3\cdot2^5$,所以展开式中各项系数的最大值为 $C_8^2\cdot$

因为 $EF=2=\frac{1}{2}AB$，$EF // CD // AB$，所以四边形 $EFGO$ 为平行四边形，……………………（2分）

所以 $OE // FG$，

又 $FG\perp$ 平面 $ABCD$，

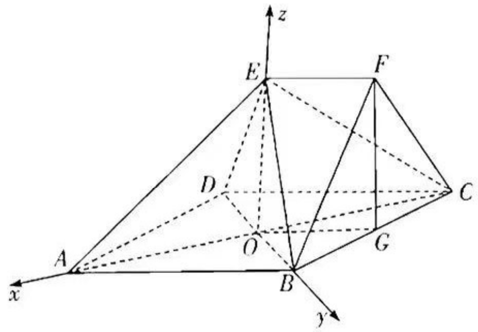
所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………（3分）

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OE\perp AC$，

又四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$. ……………………（4分）

因为 $OE\cap BD=O$，所以 $AC\perp$ 平面 BED，

又 $AC\subset$ 平面 ACE，故平面 $ACE\perp$ 平面 BED. ……………………（5分）



（Ⅱ）因为 $FG\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $FG\perp BC$，

所以 $FG=\sqrt{CF^2-CG^2}=2\sqrt{3}$，所以 $OE=2\sqrt{3}$. ……………………（6分）

如图，以点 O 为坐标原点，以直线 AC 为 x 轴，直线 BD 为 y 轴，直线 OE 为 z 轴建立空间直角坐标系，则

$A(2\sqrt{3},0,0)$，$E(0,0,2\sqrt{3})$，$B(0,2,0)$，$D(0,-2,0)$，……………………（7分）

所以 $\overrightarrow{AE}=(-2\sqrt{3},0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{BD}=(0,-4,0)$. ……………………（8分）

设平面 $ABFE$ 的法向量为 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}z=0,\\ -2\sqrt{3}x+2y=0,\end{cases}$ ……………………（9分）

令 $x=1$，可得 $\boldsymbol{v}=(1,\sqrt{3},1)$. ……………………（10分）

设直线 BD 与平面 $ABFE$ 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{v}|}=\frac{4\sqrt{3}}{4\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

故直线 BD 与平面 $ABFE$ 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………（12分）

19. **命题意图** 本题考查线性回归及离散型随机变量的期望.

解析 （Ⅰ）由题可知 $\bar{t}=\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4$，$\bar{y}=\frac{1}{7}(3+4+3+4+7+6+8)=5$，………（1分）

$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i=163$，$7\bar{t}\bar{y}=7\times4\times5=140$，$\sum_{i=1}^{7}t_i^2=140$，$7\bar{t}^2=112$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}t_iy_i-7\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7}t_i^2-7\bar{t}^2}=\frac{163-140}{140-112}=\frac{23}{28}\approx0.82$，……………………（3分）

$2^6=1\ 792$.

7. 答案　C

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质及三角函数值域的求解.

解析　因为 $f(0)=\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，且 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 因为 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $\frac{7\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}=\pi$，所以 $\omega=2$. 所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

8. 答案　D

命题意图　本题考查二面角的计算.

解析　取 AB 的中点 O，连接 OC，易知 $OA\perp OC$. 过 O 作 OH 垂直 AC 于 H，连接 SH，OS. 因为 $SO\perp$ 底面，所以 $\angle SHO$ 为平面 SAC 与底面 ABC 所成的锐二面角的平面角，可求得 $OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$SO=\sqrt{3}$，所以 $\tan\angle SHO=\frac{SO}{OH}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$.

9. 答案　A

命题意图　本题考查双曲线的方程.

解析　设双曲线 C 的半焦距为 $c(c>0)$. 由题可知 $2c=2\sqrt{3}$，即 $c=\sqrt{3}$. 因为 $|F_2Q|=\frac{1}{2}|PF_1|$，所以 $PF_2\perp F_1F_2$，所以 $|PF_2|=\frac{2c}{\sqrt{3}}$，$|PF_1|=\frac{4c}{\sqrt{3}}$，所以 $|PF_1|-|PF_2|=\frac{4c}{\sqrt{3}}-\frac{2c}{\sqrt{3}}=\frac{2c}{\sqrt{3}}=2a$，所以 $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，所以 $a=1$，$b=\sqrt{2}$. 所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

10. 答案　C

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系及平面向量的数量积.

解析　根据题意可得 $\begin{cases}(-2+m)^2=n^2,\\ 1+(-1+m)^2=n^2,\end{cases}$ 解得 $m=1$，$n^2=1$，故圆 M 的方程为 $x^2+(y+1)^2=1$. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle=\sqrt{2}|\overrightarrow{PB}|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle$，画图分析可知当与直线 PA 垂直的直线 l 和圆 N 相切，切点为 B，且直线 l 的纵截距大于 0 时，$|\overrightarrow{PB}|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle$ 最大. 设 l 的方程为 $y=-x+a(a>0)$，由圆心 $N(0,1)$ 到直线 l 的距离为 $\frac{|1-a|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $a=1+\sqrt{2}$ 或 $1-\sqrt{2}$（舍去）. 故 l 的方程为 $y=-x+1+\sqrt{2}$，其与直线 PA：$y=x-2$ 的交点坐标为 $Q\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，所以 $|PQ|=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{2}|\overrightarrow{PB}|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle\leqslant\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}+2}{2}=3+\sqrt{2}$，即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为 $3+\sqrt{2}$.

11. 答案　B

命题意图　本题考查等比数列的定义及数列求和.

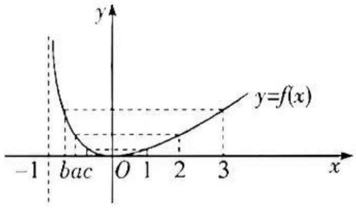
解析　由题可知 $\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}-1}=\frac{\frac{x_n^2-2}{2x_n-3}-2}{\frac{x_n^2-2}{2x_n-3}-1}=\frac{x_n^2-4x_n+4}{x_n^2-2x_n+1}=\left(\frac{x_n-2}{x_n-1}\right)^2$，由 $a_n=\ln\frac{x_n-2}{x_n-1}$，可得 $a_{n+1}=\ln\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}-1}=\ln\left(\frac{x_n-2}{x_n-1}\right)^2=2\ln\frac{x_n-2}{x_n-1}=2a_n$，故 $a_{n+1}=2a_n$，又 $a_1=1$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则 $a_n=2^{n-1}$. 所以当 $n\geqslant3$ 时，$b_n=a_{n-2}+a_n=2^{n-3}+2^{n-1}=5\cdot2^{n-3}$. 所以 $\{b_n-a_n\}$ 的前 2 022 项和为 $(b_1+b_2+b_3+\cdots+$

$b_{2\,022})-(a_1+a_2+\cdots+a_{2\,022})=\left(4+5\times\frac{1-2^{2\,020}}{1-2}\right)-\frac{1-2^{2\,022}}{1-2}=2^{2\,020}$.

12. 答案　A

命题意图　本题考查指数与对数的大小比较及导数的应用.

解析　由 $a=\ln\frac{a+1}{3}+2$，得 $a=2-\ln 3+\ln(a+1)$，于是 $a-\ln(a+1)=2-\ln 3$. 同理由 $b=\ln\frac{b+1}{4}+3$，可得 $b-\ln(b+1)=3-\ln 4$. 对于 $c=2e^{c-1}-1$，可得 $c+1=2e^{c-1}$，两边同时取对数得 $\ln(c+1)=\ln 2+c-1$，于是 $c-\ln(c+1)=1-\ln 2$. 构造函数 $f(x)=x-\ln(x+1)$，则 $f(a)=f(2)$，$f(b)=f(3)$，$f(c)=f(1)$. 因为 $f'(x)=\frac{x}{x+1}(x>-1)$，所以当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，所以 $f(1)<f(2)<f(3)$，又 $a<0$，$b<0$，$c<0$，如图所示，故 $b<a<c$.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案　$f(x)=\frac{1}{x-2}$（答案不唯一）

命题意图　本题考查函数的性质.

解析　由 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，可设 $f(x)=\frac{1}{x-2}$，则 $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$. 当 $x>2$ 时，$f(x)$ 单调递减，$f'(x)$ 单调递增，满足题意. 其他满足条件的解析式也可以.

14. 答案　$\sqrt{13}$ 或 $3\sqrt{5}$

命题意图　本题考查抛物线的性质.

解析　由题意知 $F(1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由 $|AF|=2$，得 $x_1+1=2$，得 $x_1=1$，代入 $C:y^2=4x$，得 $y_1=\pm 2$，所以 $A(1,2)$ 或 $A(1,-2)$. 由 $|BF|=5$，得 $x_2+1=5$，得 $x_2=4$，代入 $C:y^2=4x$，得 $y_2=\pm 4$，所以 $B(4,4)$ 或 $B(4,-4)$. 根据抛物线的对称性可得 $|AB|=\sqrt{13}$ 或 $|AB|=3\sqrt{5}$.

15. 答案　$\frac{5}{11}$

命题意图　本题考查条件概率的计算.

解析　设事件 B 为"拿的苹果是次品"，$A_i(i=1,2)$ 为"拿的苹果来自第 i 份"，则 $P(A_1)=0.4$，$P(B|A_1)=0.05$，$P(A_2)=0.6$，$P(B|A_2)=0.04$，所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.4\times0.05+0.6\times0.04=0.044$，所求概率为 $P(A_1|B)=\frac{P(BA_1)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.4\times0.05}{0.044}=\frac{5}{11}$.

16. 答案　$\frac{4\sqrt{102}}{9}+\frac{4\sqrt{66}}{9}+2\sqrt{2}$

命题意图　本题考查空间几何体的结构特征及导数的应用.

解析　设正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 a，高为 h. 若要使该正六棱柱的体积最大，正六棱柱应为球的内接正六棱柱中体积最大者，所以 $\frac{h^2}{4}+a^2=2^2$，即 $a^2=4-\frac{h^2}{4}$，又 $S_{正六边形ABCDEF}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以该正

六棱柱的体积为 $V=S_{\text{正六边形}ABCDEF}\cdot h=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h=\frac{3\sqrt{3}}{8}(16-h^2)h$. 设 $f(h)=(16-h^2)h,0<h<4$,则 $f'(h)=16-3h^2$,令 $f'(h)=0$,得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 因为 $f(h)$ 只有一个极值点,所以 $f(h)_{\max}=f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$,即 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3},a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时 V 取得最大值. 过 E_1 作 $PQ/\!/A_1C_1$,交 A_1F_1 的延长线于点 P,连接 AP,交 F_1F 于 G,设 PQ 交 C_1D_1 的延长线于 Q 点,连接 CQ,交 D_1D 于点 H,则五边形 $ACHE_1G$ 为平面 ACE_1 截正六棱柱所得的截面. 根据相似三角形的性质,可得 $\frac{F_1G}{GF}=\frac{1}{2}$,所以 $GF=\frac{2}{3}h,F_1G=\frac{1}{3}h$,所以 $AG=\sqrt{GF^2+AF^2}=\sqrt{\frac{4}{9}h^2+a^2}=\frac{2\sqrt{102}}{9}$,$E_1G=\sqrt{GF_1^2+E_1F_1^2}=\sqrt{\frac{1}{9}h^2+a^2}=\frac{2\sqrt{66}}{9}$,同理可得 $CH=\frac{2\sqrt{102}}{9}$,$E_1H=\frac{2\sqrt{66}}{9}$. 易知 $AC=\sqrt{3}a=2\sqrt{2}$,所以当削去的雪最少时,平面 ACE_1 截该正六棱柱所得的截面周长为 $\frac{4\sqrt{102}}{9}+\frac{4\sqrt{66}}{9}+2\sqrt{2}$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正弦定理及余弦定理的应用.

解析 (Ⅰ)因为 $c(\sin C-\sqrt{3}\sin B)=(a-b)(\sin A+\sin B)$,

所以由正弦定理可得 $c(c-\sqrt{3}b)=(a-b)(a+b)$,

即 $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$. ……(2 分)

由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……(4 分)

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{6}$. ……(5 分)

(Ⅱ)因为 $\sin B=1+\cos C$,

所以 $\sin B=1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)=1+\cos\frac{5\pi}{6}\cos B+\sin\frac{5\pi}{6}\sin B=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$,

即 $\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=1$, ……(7 分)

所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

所以 $a=b,C=\frac{2\pi}{3}$. ……(8 分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$,

所以 $a=b=2$. ……(10 分)

在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理可得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$,

即 $AD=\sqrt{7}$. ……(12 分)

18. **命题意图** 本题考查面面垂直的证明及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)如图,设 AC 与 BD 交于点 O,连接 OG,OE.

因为 O,G 分别为 BD,BC 的中点,所以 $OG/\!/AB,OG=\frac{1}{2}AB=2$.

$\hat{a}=y-\hat{b}t=1.72$,

所以 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.82t+1.72$. ……………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)设该校不是会员时,网课效果得分为 X,则 X 的所有可能取值为 5,3,2,0,

$P(X=5)=\frac{1}{4}$,

$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$,

$P(X=0)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$. ……………………………………………………(7 分)

所以 $E(X)=\frac{1}{4}\times5+\frac{1}{4}\times3+\frac{2}{5}\times2+\frac{1}{10}\times0=\frac{14}{5}$. ……………………………………(8 分)

设该校是会员时,网课效果得分为 Y,则 Y 的所有可能取值为 5,3,2,0,

$P(Y=5)=\frac{3}{5}$,

$P(Y=3)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$,

$P(Y=2)=\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{12}{125}$,

$P(Y=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$. ……………………………………………………(10 分)

所以 $E(Y)=\frac{3}{5}\times5+\frac{6}{25}\times3+\frac{12}{125}\times2+\frac{8}{125}\times0=\frac{489}{125}$. ……………………………(11 分)

因为 $\frac{489}{125}>\frac{14}{5}$,

所以该校充值为会员后,网课效果得分的数学期望有了提高. ……………………………(12 分)

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程的求解及直线与椭圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)设 $P(x_0,y_0)$,$x_0>0$,$y_0>0$,则过点 P 的椭圆的切线方程为 $\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$.

联立 $\begin{cases}\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1,\\ x=-a,\end{cases}$ 可得 $P_1\left(-a,\frac{b^2(a+x_0)}{ay_0}\right)$,

同理可得 $P_2\left(a,\frac{b^2(a-x_0)}{ay_0}\right)$. ……………………………………………………(2 分)

所以 $|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=\frac{b^2(a+x_0)}{ay_0}\cdot\frac{b^2(a-x_0)}{ay_0}=\frac{b^4(a^2-x_0^2)}{a^2y_0^2}=\frac{b^4(a^2-x_0^2)}{b^2(a^2-x_0^2)}=b^2=1$,即 $b=1$. …………(3 分)

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}$,所以 $a=2$. ……………………………………(4 分)

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)联立直线 l 和椭圆 E 的方程得 $\begin{cases}y=kx+3,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y 得 $(1+4k^2)x^2+24kx+32=0$.

由 $\Delta=(24k)^2-4\times32(1+4k^2)>0$,可得 $k^2>2$. ……………………………………（7分）

设 $S(x_1,y_1)$,$T(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\dfrac{-24k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{32}{1+4k^2}>0$. ……………………（8分）

由题易知 $x_1\neq0$,$x_2\neq0$,$y_1\neq-1$,$y_2\neq-1$,

所以直线 SN 的方程为 $y+1=\dfrac{y_1+1}{x_1}(x-0)$,

令 $y=0$,得 $x_C=\dfrac{x_1}{y_1+1}$,同理 $x_D=\dfrac{x_2}{y_2+1}$. ……………………………………（9分）

所以 $|OC|\cdot|OD|=\left|\dfrac{x_1}{y_1+1}\right|\cdot\left|\dfrac{x_2}{y_2+1}\right|$

$=\dfrac{x_1x_2}{(y_1+1)(y_2+1)}$

$=\dfrac{x_1x_2}{(kx_1+4)(kx_2+4)}$

$=\dfrac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+4k(x_1+x_2)+16}$ ……………………………………（11分）

$=\dfrac{\dfrac{32}{1+4k^2}}{k^2\cdot\dfrac{32}{1+4k^2}+4k\left(\dfrac{-24k}{1+4k^2}\right)+16}$

$=\dfrac{32}{16}$

$=2$.

故 $|OC|\cdot|OD|$ 为定值 2. ……………………………………（12分）

21. **命题意图** 本题考查导数的应用.

解析 （Ⅰ）由题可知 $f'(x)=xe^x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2e^x-a}{x}(x>0)$. ……………………（1分）

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 没有最小值. ……………………………………（2分）

当 $a>0$ 时,设 $\varphi(x)=x^2e^x-a(x>0)$,则 $\varphi'(x)=e^x(x+2)x>0$,所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

又当 $x>0$ 且 $x\to0$ 时,$\varphi(x)\to-a$,当 $x\to+\infty$ 时,$\varphi(x)\to+\infty$,

故 $\exists x_0>0$,使得 $\varphi(x_0)=0$,

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$\varphi(x)<0$,$f'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$\varphi(x)>0$,$f'(x)>0$.

因为 $\varphi(x_0)=0$,所以 $x_0^2e^{x_0}=a$. ……………………………………（3分）

故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-a\ln x_0=(x_0-1)e^{x_0}-x_0^2e^{x_0}\ln x_0=x_0^2e^{x_0}\left(\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}-\ln x_0\right)=0$.

因为 $x_0^2e^{x_0}>0$,所以 $\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}-\ln x_0=0$. ……………………………………（4分）

设 $t(x)=x-x^2+\ln x$,则 $t'(x)=1-2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-(2x+1)(x-1)}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$t'(x)>0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$t'(x)<0$,

所以 $t(x)_{\max}=t(1)=0$, ………………………………（5分）

所以 $\frac{1}{x_0}=1, x_0=1$，所以 $a=\mathrm{e}$. ………………………………（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $(x-1)\mathrm{e}^{x-1}\geqslant \ln x$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立. ………………（7分）

令 $x=1+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}>\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)=\ln(n+1)-\ln n$,

从而有 $\mathrm{e}>\ln 2-\ln 1, \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}>\ln 3-\ln 2, \frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}{3}>\ln 4-\ln 3,\cdots,\frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}>\ln(n+1)-\ln n$. ……………（8分）

所以 $\mathrm{e}+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}+\frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)$.

………………………………（9分）

令 $n=2\ 023$，则 $\mathrm{e}+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}+\frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt[2\,022]{\mathrm{e}}}{2\ 022}+\frac{\sqrt[2\,023]{\mathrm{e}}}{2\ 023}>\ln 2\ 024$. ………………（10分）

只需证明 $\ln 2\ 024>\frac{2\ 024}{2\ 025}\ln 2\ 025$，即证 $\frac{\ln 2\ 024}{2\ 024}>\frac{\ln 2\ 025}{2\ 025}$.

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$h'(x)<0$, ………………（11分）

所以 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\frac{\ln 2\ 024}{2\ 024}>\frac{\ln 2\ 025}{2\ 025}$.

故 $\mathrm{e}+\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}+\frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt[2\,022]{\mathrm{e}}}{2\ 022}+\frac{\sqrt[2\,023]{\mathrm{e}}}{2\ 023}>\frac{2\ 024}{2\ 025}\ln 2\ 025$. ………………（12分）

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程、极坐标方程与直角坐标方程之间的互化，以及参数方程的应用.

解析 （Ⅰ）由 $\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=2\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{cases}$（$t$ 为参数）消去参数 t，可得曲线 E 的普通方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. ……（2分）

令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 可得直线 AB 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+1=0$,

故直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$. ………………………………（4分）

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)$,

则直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}s,\\ y=y_0+\frac{1}{2}s\end{cases}$（$s$ 为参数），

直线 CD 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+m\cos\beta,\\ y=y_0+m\sin\beta\end{cases}$（$m$ 为参数）. ………………（5分）

将直线 CD 的参数方程代入曲线 E 的方程可得

$(4\cos^2\beta-\sin^2\beta)m^2+2(4x_0\cos\beta-y_0\sin\beta)m+(4x_0^2-y_0^2-16)=0$. ………………（6分）

设 C,D 对应的参数分别为 m_1,m_2,

根据参数 m 的几何意义,可得 $|PC|\cdot|PD|=|m_1|\cdot|m_2|=\left|\dfrac{4x_0^2-y_0^2-16}{4\cos^2\beta-\sin^2\beta}\right|$.

同理可得 $|PA|\cdot|PB|=\left|\dfrac{16x_0^2-4y_0^2-64}{11}\right|$.

所以 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\dfrac{|16\cos^2\beta-4\sin^2\beta|}{11}=\dfrac{|10\cos 2\beta+6|}{11}$. ……………………………………………………（8 分）

因为 $0<\beta<\dfrac{\pi}{6}$,所以 $0<2\beta<\dfrac{\pi}{3}$,所以 $\dfrac{1}{2}<\cos 2\beta<1$, ……………………………………………………（9 分）

故 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}$ 的取值范围为 $\left(1,\dfrac{16}{11}\right)$. ……………………………………………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的求解及基本不等式的应用.

解析 （Ⅰ）由题可知 $f(x)=\begin{cases}-6,x\leqslant 0,\\4x-6,0<x<3,\\6,x\geqslant 3.\end{cases}$ ……………………………………………………（2 分）

由 $|f(x)|\leqslant 2$ 可得 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$, ……………………………………………………（3 分）

所以 $-2\leqslant 4x-6\leqslant 2$,所以 $1\leqslant x\leqslant 2$.

故不等式 $|f(x)|\leqslant 2$ 的解集为 $[1,2]$,

所以 $a=1,b=2$. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $x^2+4y^2=32$,

所以 $(x+2y)^2=x^2+4y^2+4xy=32+2\cdot x\cdot 2y\leqslant 32+2\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)^2$.

所以 $-8\leqslant x+2y\leqslant 8$. ……………………………………………………（6 分）

设 $t=x+2y$,则 $-8\leqslant t\leqslant 8$,

$x+2y-xy=x+2y-\dfrac{1}{2}x\cdot 2y\geqslant x+2y-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)^2=t-\dfrac{t^2}{8}=-\dfrac{1}{8}(t-4)^2+2$. ………………………（8 分）

因为函数 $g(t)=-\dfrac{1}{8}(t-4)^2+2$ 在 $(-8,4)$ 上单调递增,在 $(4,8)$ 上单调递减,

所以 $-\dfrac{1}{8}(t-4)^2+2\geqslant-\dfrac{1}{8}(-8-4)^2+2=-16$. ……………………………………………………（9 分）

故 $x+2y-xy$ 的最小值为 -16,当且仅当 $x=-4,y=-2$ 时,等号成立. ……………………………（10 分）

关于我们