

绝密★启用并使用完毕前

## 2022 届高三年级第二次线上联考

# 数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试时间为 120 分钟。

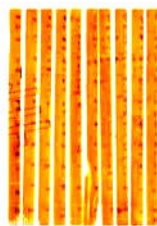
- 注意事项：**
1. 答卷前，考生务必将自己的准考证号填写在答题卡上。
  2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
  3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案。
  4. 考生必须保持答题卡的清洁。考试结束后，考生有 10 分钟的时间提交自己的答题卡，逾期提交答题卡的成绩无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $i$  是虚数单位，复数  $z$  满足  $z + 2\bar{z} = 3 - 6i$ ，则  $z =$   
A.  $1 + 6i$                       B.  $1 - 6i$                       C.  $1 + 2i$                       D.  $1 - 2i$
2. 若抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上一点  $A(6, y_0)$  到焦点的距离为 8，则  $p =$   
A. 1                              B. 2                              C. 4                              D. 8
3. 已知  $M, N$  是全集  $U$  的两个非空子集，若  $M \cap (\complement_U N) = M$ ，则下列说法可能正确的是  
A.  $M \cup (\complement_U N) = U$       B.  $(\complement_U M) \cup N = M$       C.  $M \cap N \neq \emptyset$               D.  $M \cup N = U$
4. 如图是藏于清华大学的“算表”，算表距今已有 2300 余年历史，它能够快速进行 100 以内任意两整数的乘除运算，其计算能力远强于人们熟知的“九九乘法表”，算表是迄今为止发现的人类最早上的十进制计算器，表明当时中国的数学研究水平已经初具规模。

下以计算  $22 \times 35$  为例，解释算表的大致原理：

- ①将 22 分为 2 和 20；将 35 分为 5 和 30；
- ②在算表第 1 行分别找到 2 和 20；在算表第 1 列找到 5 和 30；
- ③分别在算表中找到 2 和 5、30 及 20 和 5、30 的交叉点所对应的数字；
- ④将 4 个对应的数字相加，得  $22 \times 35 = 10 + 60 + 100 + 600 = 770$ 。



×	2	10	20
5	10	...	100
10	...	...	...
30	60	...	600

如果从现代数学体系来看，该计算方法所利用的公理是

- A. 加法交换律                      B. 乘法分配律                      C. 加法结合律                      D. 乘法交换律

数学试卷第 1 页（共 6 页）

5. 若  $\frac{\sin 2\alpha}{3\cos\alpha - 1} = \tan\alpha$ , 则  $\cos\alpha$  的值为
- A. 1 或  $\frac{1}{2}$                       B. -1 或  $-\frac{1}{2}$                       C. -1 或  $\frac{1}{2}$                       D.  $\pm 1$  或  $\frac{1}{2}$
6. 已知随机变量  $X \sim N(1, m)(m > 0)$ , 则下列说法不正确的是
- A. 若  $P(X > m) = 0.5$ , 则  $DX = 1$
- B. 若  $P(X \geq 2) = 0.3$ , 则  $P(0 \leq x < 1) = 0.2$
- C. 不论  $m$  取何值,  $EX = 1$  总成立
- D. 根据“3 $\sigma$ 原则”, 在一次试验中, 事件“ $X \notin (1 - 3m, 1 + 3m)$ ”几乎不可能发生
7. 已知数列  $\{a_n\}$ , 设  $p: a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$  三项既是等差数列, 又是等比数列;  $q: \{a_n\}$  是常数列, 则  $p$  是  $q$  的
- A. 充要条件    B. 必要不充分条件
- C. 充分不必要条件                                      D. 既不充分也不必要条件
8. 设定义在  $\mathbf{R}$  上的连续偶函数满足  $f(x+1) + f(-x+1) = 0$ , 且当  $x \in [0, 1)$  时,  $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ . 若函数  $g(x) = f(x) - kx + k(k \in \mathbf{R})$  恰好有 5 个零点, 则实数  $k$  的取值范围是
- A.  $\{-\frac{\sqrt{5}}{10}\} \cup (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2})$     B.  $\{-\frac{\sqrt{6}}{6}\} \cup (\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
- C.  $\{-\frac{\sqrt{5}}{10}\} \cup (\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})$     D.  $\{-\frac{\sqrt{6}}{6}\} \cup (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

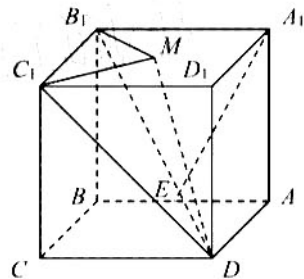
9. 对于一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 下列表达式中, 能够刻画该组数据的离散程度的是

注:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ;  $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  和  $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  分别表示  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中的最大值和最小值.

- A.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$     B.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$
- C.  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$     D.  $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$
10. 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 且  $ab = 1$ , 则
- A.  $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 4$                       B.  $a^b < \frac{3}{2}$                       C.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2$                       D.  $\frac{a^2 + 3b^2}{b^2 + 1} \geq 2$

11. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 2$ , 点  $M$  为正方形  $A_1B_1C_1D_1$  内部一点, 点  $E$  为棱  $AB$  中点,  $C_1M \perp$  平面  $B_1DM$ . 则

- A. 异面直线  $A_1E$  和  $C_1M$  夹角的余弦值为  $\frac{1}{2}$
- B. 点  $A_1$  和点  $C$  到平面  $B_1DM$  的距离相等
- C. 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  被平面  $A_1EM$  截得的截面为等腰梯形
- D. 三棱锥  $C_1 - B_1DM$  外接球的半径为  $\sqrt{3}$



12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2ax - \frac{2}{a}y + a^2 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} = 0 (a > 0)$ , 直线  $l: x + y = 0$ ,  $AB$  为圆  $C$  上一动弦, 且  $|AB| = 1$ . 则

- A. 当实数  $a$  变化时, 圆  $C$  最多能够经过 3 个象限
- B. 存在  $a > 0$ , 使得直线  $l$  和圆  $C$  相交
- C.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  的最小值是  $\frac{15}{4}$
- D. 点  $A$  到直线  $l$  距离的最大值是  $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

- 13. 若平面单位向量  $a, b, c$  满足  $c = 2(a + b)$ , 则  $a \cdot c =$  \_\_\_\_\_.
- 14. 写出一个同时满足下列要求的连续函数  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

①  $f(x)$  的表达式中至少含有  $e^x, x^n (n \in \mathbf{N}^+), \ln x$  中的两个; ② 存在一个极值点  $x = 3$ .

- 15. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ . 与  $x$  轴垂直的直线  $l$  经过  $F_2$ , 交  $C$  于  $A, B$  两点. 记  $|F_1F_2| = 2c$ . 若  $\triangle ABF_1$  内切圆的半径为  $\frac{c}{2}$ , 则  $C$  的离心率为 \_\_\_\_\_.
- 16. 在四面体  $P - ABC$  中,  $\triangle ABC$  是边长为 2 的等边三角形,  $PA \perp$  平面  $ABC$ , 且  $PA = 1$ , 则点  $A$  到平面  $PBC$  的距离是 \_\_\_\_\_; 动点  $M, N$  分别在线段  $PA$  (含端点) 上和  $\triangle PBC$  所在平面中运动, 满足  $MN = 1$ . 记  $\triangle ABC$  的外心为  $O$ , 则  $ON^2$  的取值范围是 \_\_\_\_\_. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中， $a, b, c$  分别为  $A, B, C$  所对的边， $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2a}{c}$ ， $\tan A = 4\sqrt{3}$ 。

- (1) 求  $B$ ；
- (2) 若  $b = 7$ ，求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ 。

18. (12 分)

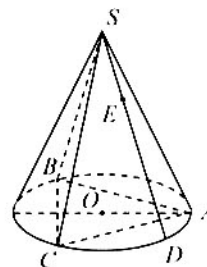
已知数列  $\{a_n\}$  满足： $a_1 = a (a \in \mathbf{R})$ ， $a_{n+1} = a_n^2$ 。

- (1) 若  $\{a_n\}$  是常数列，求  $a$ ；
- (2) 已知  $a = 2$ 。
  - (i) 证明： $\{\log_2 a_n\}$  是等比数列；
  - (ii) 设  $b_n = \frac{\log_2 a_{n+1}}{(\log_2 a_{n+1} - 1)(\log_2 a_{n+2} - 1)}$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ 。

19. (12 分)

如图，在圆锥  $SO$  中， $\odot O$  的内接三角形  $\triangle ABC$  为等边三角形， $OA = 2$ ，且圆锥的侧面展开图恰好为半圆。

- (1) 证明： $SA \perp BC$ ；
- (2) 点  $D$  是底面  $\odot O$  上的一个动点， $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{ES}$ ，求二面角  $A-BC-E$  余弦值的最小值。



20. (12分)

近日,河南突降暴雨,郑州、驻马店等多地陷入灾情,习近平总书记对防汛救灾工作作出重要指示,各地迅速向河南伸出援手,体现了“一方有难,八方支援”的人间真情.

降雨重现期是指在一定年代的降雨量记录资料统计期间内,大于或等于某暴雨强度的降雨出现一次的平均间隔时间.现已知近年来郑州市暴雨强度  $i$  (mm/min) 与降雨历时  $t$  (min) 具有的关系大致是

$$i = \frac{A}{(t+20)^{0.85}}.$$

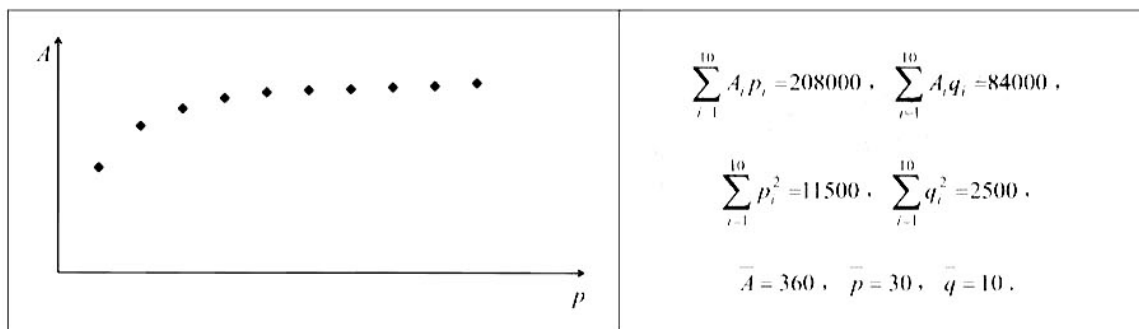
其中中间变量  $A$  与降雨重现期  $p$  (年) 具有如图所示的关系.

现有两个回归模型可供选择:

①根据  $A$  与  $p$  成正相关关系,直接采用线性回归模型  $\hat{A} = bp + a$ ;

②根据  $A$  与  $p$  成正相关关系,且考虑模型拟合曲线的增减速率,采用回归模型  $\hat{A} = b \lg p + a$ .

相关数据统计如下表(其中  $q_i = \lg p_i$ ):



(1) 请选择合适的回归模型,求出暴雨强度  $i$  (mm/min)、降雨历时  $t$  (min)、降雨重现期  $p$  (年) 具有的函数关系;

(2) 已知郑州7月20日16时—17时降雨量曾经达到过3.4 mm/min,请利用(1)得到的函数关系,分析“今年河南的暴雨千年一遇”这种说法的合理性.(参考数据:  $80^{0.85} \approx 40$ ,  $60^{0.85} \approx 30$ )

附:对于一组数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ , 其回归直线  $\hat{y} = bx + a$  的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

21. (12分)

设函数  $f(x) = (ax+1)\ln x - \frac{x^2}{2} - ax + a + \frac{1}{2} (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 当  $a=2$  时, 证明:  $f(x) \leq 0$ ;

(2) 已知  $f(x)$  恰好有 3 个极值点  $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ ,

(i) 求实数  $a$  的取值范围;

(ii) 证明:  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} > a^2 - 4a + 7$ .

22. (12分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左顶点和右焦点的距离是 3, 且  $C$  的离心率是 2.

(1) 求双曲线  $C$  的标准方程;

(2) 点  $A(x_0, y_0)$  是  $C$  上位于第一象限的一点, 点  $A, B$  关于原点  $O$  对称, 点  $A, D$  关于  $y$  轴对称, 延长  $AD$  至  $E$  使得  $|DE| = \frac{1}{3}|AD|$ , 且直线  $BE$  和  $C$  的另一个交点  $F$  位于第二象限中.

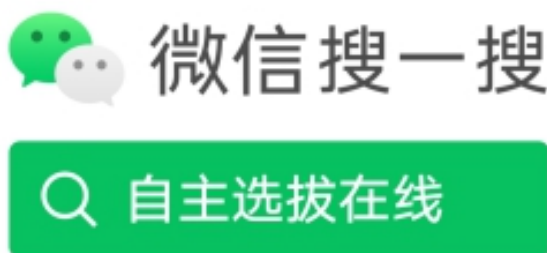
(i) 求  $x_0$  的取值范围;

(ii) 证明:  $AE$  不可能是  $\angle BAF$  的三等分线.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》