

2023 年上学期高一期期末考试数学试卷

时间：120min 分值：150 分 命题：袁雄辉 审题：刘娅

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 为虚数单位， $z(1+i^3)=1+i$ ，则 $z=(\quad)$
A. -1 B. i C. $1-i$ D. $-i$
2. 在锐角三角形 ABC 中， $a=2b\sin A$ ，则 $B=(\quad)$
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{7\pi}{12}$
3. 已知 m, n 是两条不同的直线， α, β, γ 是三个不同的平面，则下列结论正确的是 (\quad) .
A. 若 $m//n, m//\alpha$ ，则 $n//\alpha$ B. 若 $m\perp\alpha, \alpha\perp\beta$ ，则 $m//\beta$
C. 若 $\alpha\perp\gamma, \beta\perp\gamma$ ，则 $\alpha//\beta$ D. 若 $m//n, \alpha//\beta, m\perp\alpha$ ，则 $n\perp\beta$
4. 甲、乙两人独立地解决某个数学难题，甲解决出该难题的概率为 0.4，乙解决出该难题的概率为 0.5，则该难题被解决出的概率为 (\quad) .
A. 0.9 B. 0.8 C. 0.7 D. 0.2
5. 已知 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)$ ， $b=\frac{1-\tan^2 22.5^\circ}{1+\tan^2 22.5^\circ}$ ， $c=\sin 22^\circ \cos 24^\circ+\cos 22^\circ \sin 24^\circ$ ，
则 a, b, c 的大小顺序为 (\quad)
A. $b>a>c$ B. $c>b>a$ C. $c>a>b$ D. $b>c>a$
6. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BD}=2\overline{DA}$ ，若 $\overline{CB}=\lambda\overline{CA}+\mu\overline{CD}$ ，则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为 (\quad)
A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
7. 在《九章算术》中，底面为矩形的棱台被称为“刍童”。已知棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 是一个侧棱相等、高为 1 的“刍童”，其中 $AB=2A'B'=2$ ， $BC=2B'C'=2\sqrt{3}$ ，则该“刍童”外接球的表面积为 (\quad)
A. 20π B. $\frac{20}{3}\pi$ C. $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ D. $5\sqrt{5}\pi$
8. 函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$ ，当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 时都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ ，且对任意的

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 不等式 $f(ax+1) \leq f(x-2)$ 恒成立. 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-5, 1]$ B. $[-5, 0]$ C. $[-2, 0]$ D. $[-2, 1]$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 ()

- A. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 0$ ”
 B. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2=1$ ”是“ $x=1$ ”的必要不充分条件
 C. 若事件 A, B 满足 $P(A)+P(B)=1$, 则 A, B 是对立事件
 D. 若事件 A, B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$, 则事件 A, B 相互独立

10. 复数 z_1, z_2 在复平面内对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$, 则下列四个结论错误的是 ()

- A. $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2$ B. 若 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 \cdot z_2 = 0$
 C. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 恒成立 D. 若 $(\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}) \perp (\overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2})$, 则 $z_1 = z_2$

11. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 以下结论中正确的是 ()

- A. 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$
 B. 若 $a=2, b=\sqrt{5}, B=\frac{\pi}{3}$, 则该三角形有两解
 C. 若 $a \cos A = b \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 一定为等腰三角形
 D. 若 $\sin^2 C > \sin^2 A + \sin^2 B$, 则 $\triangle ABC$ 一定为钝角三角形

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, H 为棱 AA_1 (包含端点) 上的动点, 下列命题正确的是 ()

- A. $CH \perp BD$ B. 二面角 D_1-AB_1-C 的大小为 $\frac{\pi}{3}$
 C. 点 H 到平面 B_1CD_1 距离的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$
 D. 若 $CH \perp$ 平面 β , 则直线 CD 与平面 β 所成角的正弦值的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值是_____.

14. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$ _____.

15. 一组数据由 6 个数组成, 将其中一个数由 4 改为 1, 另一个数由 6 改为 9, 其余数不变, 得到新的一组数据, 则新的一组数的方差相比原一组数的方差的增加值为_____.

16. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{e}$ 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{e}| = 1, |\vec{b} - \vec{a}| = 1, \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 且对任意的实数 t , 均有 $|\vec{c} - t\vec{e}| \geq |\vec{c} - 2\vec{e}|$, 则 $|\vec{c} - \vec{b}|$ 的最小值为_____.

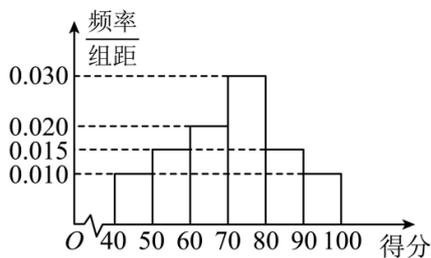
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题 10 分) 已知向量 \vec{a}, \vec{b} , 若 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 60° .

(1) 求 $|\vec{a} + 2\vec{b}|$;

(2) 当 λ 为何值时, 向量 $\lambda\vec{a} - \vec{b}$ 与向量 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 互相垂直?

18. (本小题 12 分) 2022 年, 是中国共产主义青年团成立 100 周年, 为引导和带动青少年重温共青团百年光辉历程, 某校组织全体学生参加共青团百年历史知识竞赛, 现从中随机抽取了 100 名学生的成绩组成样本, 并将得分分成以下 6 组 $[40, 50), [50, 60), [60, 70), \dots, [90, 100]$, 统计结果如图所示:



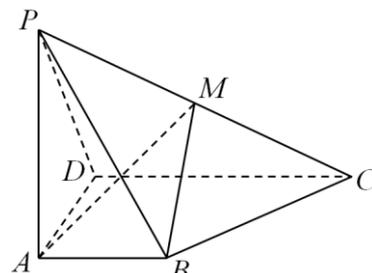
(1) 试估计这 100 名学生得分的平均数 (同一组中的数据用该组区间中点值代表);

(2) 试估计这 100 名学生得分的中位数 (结果保留两位小数);

(3) 现在按分层抽样的方法在 $[80, 90)$ 和 $[90, 100]$ 两组中抽取 5 人, 再从这 5 人中随机抽取 2

人参加这次竞赛的交流会, 求两人都在 $[90, 100]$ 的概率

19. (本小题 12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp$ 平面 PAD , $PA=AD=DC=2AB=4$, $PD=2\sqrt{7}$, M 是 PC 的中点.



(1) 证明: $BM \parallel$ 面 PAD

(2) 证明: 平面 $ABM \perp$ 平面 PCD ;

(3) 求三棱锥 $M-PAB$ 的体积.

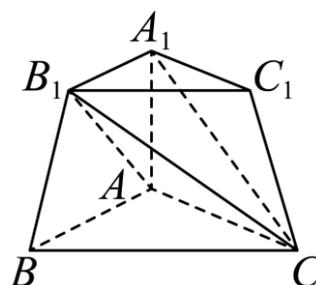
20. (本小题 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 已知

$$b \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) - a \sin B = 0.$$

(1) 求角 A ;

(2) 若 D 为边 BC 上一点 (不包含端点), 且满足 $\angle ADB = 2\angle ACB$, 求 $\frac{BD}{CD}$ 的取值范围.

21. (本小题 12 分) 如图, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BB_1$, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1A_1 .



(1) 求证: $AC \perp BB_1$;

(2) 若 $AB=2A_1B_1=2$, $\triangle AB_1C$ 的面积为 4, 求二面角 $A-B_1C-A_1$ 的余弦值.

22. (本小题 12 分). 已知函数 $f(x) = \log_4(4^x + 1) - mx$ 是偶函数.

(1) 求 m 的值;

(2) 若 $g(x) = 4^{f(x)}$, $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, 不等式 $b \cdot g^2(x) - |a \cdot g(x) - b| + a \geq 0$ 对任意

$x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 恒成立, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围.