

2023—2024 学年度高三一轮复习摸底测试卷 数学(一)

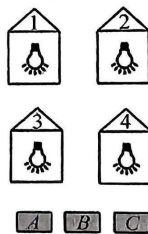
本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | \sqrt{x^2 - 3x} < 2\}$, $N = \{x | x \leq \frac{7}{2}\}$, 则 $M \cap N =$
 - A. $(-1, \frac{7}{2}]$
 - B. $(3, \frac{7}{2}]$
 - C. $(-1, 0) \cup (3, \frac{7}{2}]$
 - D. $(-1, 0] \cup [3, \frac{7}{2}]$
2. 若复数 z 满足 $(1-i)\bar{z} = (2-i)^2$, 则 z 在复平面内对应的点位于
 - A. 第一象限
 - B. 第二象限
 - C. 第三象限
 - D. 第四象限
3. 在平行四边形 $ABCD$ 中,点 E 满足 $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BC}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda\mu =$
 - A. $-\frac{3}{16}$
 - B. $-\frac{3}{8}$
 - C. $\frac{3}{16}$
 - D. 1
4. 光岳楼,又称“余木楼”“鼓楼”“东昌楼”,位于山东省聊城市,在《中国名楼》站台票纪念册中,光岳楼与鹤雀楼、黄鹤楼、岳阳楼、太白楼、滕王阁、蓬莱阁、镇海楼、甲秀楼、大观楼共同组成中国十大名楼.其墩台为砖石砌成的正四棱台,如图所示,光岳楼的墩台上底面正方形的边长约为 32 m,下底面正方形的边长约为 34.5 m,高的 4 倍比上底面的边长长 4 m,则光岳楼墩台的体积约为
 - A. $9\ 872.75\ \text{m}^3$
 - B. $9\ 954.75\ \text{m}^3$
 - C. $9\ 988.45\ \text{m}^3$
 - D. $9\ 998.25\ \text{m}^3$
5. 如图, A, B, C 三个开关控制着 1, 2, 3, 4 号四盏灯,其中开关 A 控制着 2, 3, 4 号灯,开关 B 控制着 1, 3, 4 号灯,开关 C 控制着 1, 2, 4 号灯.开始时,四盏灯都亮着.现先后按动 A, B, C 这三个开关中的两个不同的开关,则其中 1 号灯或 2 号灯亮的概率为
 - A. $\frac{1}{6}$
 - B. $\frac{1}{3}$
 - C. $\frac{1}{2}$
 - D. $\frac{2}{3}$



6. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 满足 $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{3})$, 若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, t]$ 上恰有 3 个零点, 则实数 t 的取值范围为

- A. $[\frac{25\pi}{24}, \frac{37\pi}{24})$ B. $[\frac{25\pi}{24}, \frac{49\pi}{24})$ C. $[\frac{37\pi}{24}, \frac{49\pi}{24})$ D. $(\frac{37\pi}{24}, \frac{49\pi}{24}]$

7. 设 $a = \frac{\ln 4}{4}$, $b = \frac{4 - \ln 4}{e^2}$, $c = \frac{\sqrt{e}}{2e}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

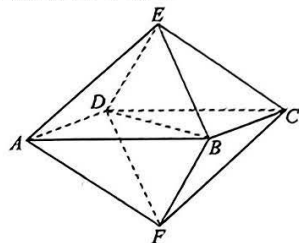
8. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点均在一个半径为 2 的球面上, 则该正三棱锥体积的最大值为

- A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $\frac{64\sqrt{3}}{27}$ D. $\frac{64\sqrt{3}}{9}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 如图, 两个共底面的正四棱锥组成一个八面体 $E-ABCD-F$, 且该八面体的各棱长均相等, 则

- A. 异面直线 AE 与 BC 所成的角为 60°
B. $BD \perp CE$
C. 平面 $ABF \parallel$ 平面 CDE
D. 直线 AE 与平面 BDE 所成的角为 60°



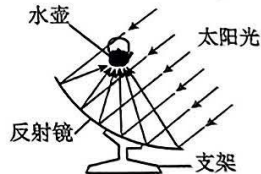
10. 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + f'(1)x^2 + \frac{5}{3}$, 则

- A. $f'(1) = 1$ B. $f(x)$ 有两个极值点
C. 曲线 $y = f(x)$ 的切线的斜率可以为 -2 D. 点 $(1, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

11. 用于加热水和食物的太阳灶应用了抛物线的光学性质: 一束平行于抛物线对称轴的光线, 经过抛物面(抛物线绕它的对称轴旋转所得到的曲面叫抛物面)反射后, 集中于它的焦点. 用一过抛物线对称轴的平面截抛物面, 将所截得的抛物线 C 放在平面直角坐标系中, 对称轴与 x 轴重合, 顶点与原点重合. 若抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , O 为坐标原点, 一条平行于 x 轴的光线 l_1 从点 M 射入, 经过 C 上的点 $A(x_1, y_1)$ 反射, 再经过 C 上另一点 $B(x_2, y_2)$ 反射后, 沿直线 l_2 射出, 则

- A. C 的准线方程为 $x = -1$
B. $y_1 y_2 = -2$
C. 若点 $M(2, 1)$, 则 $|AB| = \frac{11}{2}$

D. 设直线 AO 与 C 的准线的交点为 N , 则点 N 在直线 l_2 上



12. 已知非常数函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 若 $f(2-x)$ 为奇函数, $f(2x+4)$ 为偶函数, 则

- A. $f(2) = 1$ B. $f(2024) = -f(2020)$
C. $f'(-1) = f'(7)$ D. $f'(-2021) = f'(2025)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $(3x - \frac{a}{x})(x - \frac{2}{x})^7$ 的展开式中各项系数的和为 4, 则实数 a 的值为_____.

14. 写出与圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 和圆 $D: x^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 1$ 都相切的一条直线的方程_____.

15. 已知直线 $y = kx + b$ ($k \in \mathbf{R}, b \neq 0$) 是曲线 $f(x) = e^x - 1$ 与 $g(x) = 1 + \ln x$ 的公切线, 则 $k + b =$ _____.

16. 某休闲广场呈椭圆形,在该椭圆的两个焦点及中心处分别安装有三盏景观灯 A, B, C ,其中灯 B 位于灯 A 的正东 400 m 处.小王沿着该休闲广场的边沿散步,在散步的过程中,他与灯 B 的最短距离为 50 m.当小王行走到点 M 处时,他与灯 A, B 的距离之比为 3:2,则此时他与灯 C 的距离为 _____ m.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=1$,且 a_2, a_5, a_{14} 成等比数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)当数列 $\{a_n\}$ 的公差不为 0 时,记数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{S_{2n-1}S_{2n+1}}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ,求证:

$$T_n < \frac{1}{2}.$$

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $c \cos C \cos(A-B) + c = c \sin^2 C + b \sin A \sin C$.

(1)求 C ;

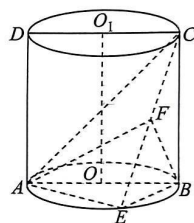
(2)若 $c=4, CD \perp AB$ 于点 D ,求线段 CD 长度的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

如图,已知正方形 $ABCD$ 是圆柱 OO_1 的轴截面(经过旋转轴的截面),点 E 在底面圆周上, $AB=5, AE=4$,点 F 是 CE 的中点.

(1)求点 B 到平面 ACE 的距离;

(2)求二面角 $A-BF-E$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2(x+2) - e^x$.

(1)求 $f(x)$ 的极值;

(2)当 $x \geq 0$ 时,证明: $f(x) < x - \sin x + 4$.

21. (本小题满分 12 分)

网络直播带货作为一种新型的销售土特产的方式,受到社会各界的追捧.湖北某地盛产夏橙,为帮助当地农民销售夏橙,当地政府邀请了甲、乙两名网红在某天通过直播带货销售夏橙.现对某时间段 100 名观看直播后选择在甲、乙两名网红的直播间(以下简称甲直播间、乙直播间)购买夏橙的情况进行调查(假定每人只在一个直播间购买夏橙),得到如下数据:

网民类型	在直播间购买夏橙的情况		合计
	在甲直播间购买	在乙直播间购买	
男网民	50	5	55
女网民	30	15	45
合计	80	20	100

(1)依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,能否认为网民选择在甲、乙直播间购买夏橙与性别有关联?

(2)网民黄蓉上午、下午均从甲、乙两个直播间中选择其中一个购买夏橙,且上午在甲直播间购买夏橙的概率为 $\frac{1}{2}$.若上午选择在甲直播间购买夏橙,则下午选择在甲直播间购买夏橙的概率为 $\frac{3}{5}$;若上午选择在乙直播间购买夏橙,则下午选择在甲直播间购买夏橙的概率为 $\frac{7}{10}$,求黄蓉下午选择在乙直播间购买夏橙的概率;

(3)用样本分布的频率估计总体分布的概率,若共有 50 008 名网民在甲、乙直播间购买夏橙,且网民选择在甲、乙哪个直播间购买夏橙互不影响,记其中在甲直播间购买夏橙的网民人数为 X ,求使事件“ $X=k$ ”的概率取最大值的 k 的值.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879

22. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的右焦点为 $F(2,0)$,且 C 的一条渐近线恰好与直线 $x-y+1=0$ 垂直.

(1)求 C 的方程;

(2)直线 $l: x=my+1$ 与 C 的右支交于 A, B 两点,点 D 在 C 上,且 $AD \perp x$ 轴.求证:直线 BD 过点 F .

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

