高三数学参考答案、提示及评分细则

1. C　$A=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x|x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，得 $B\subsetneqq A$，故 $A\cap B=B,A\cup B=A,B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=\varnothing,A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}\neq\varnothing$，故 A，B，D 均错误，C 正确．故选 C．

2. D　$[(2x-1)^2]'=2(2x-1)\cdot 2=4(2x-1)$，故 A 错误；$(2^x+x^2)'=2^x\ln 2+2x$，故 B 错误；$\left(\sin x-\cos\frac{\pi}{3}\right)'=\cos x$，故 C 错误；$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}=\frac{\log_2 e}{x}$，故 D 正确．故选 D．

3. A　因为 $f(x)$ 为幂函数，所以 $m^2+m-1=1$，解得 $m=-2$，或 $m=1$，又 $f(x)$ 的图象与坐标轴无公共点，故 $m<0$，所以 $m=-2$，故 $f(x)=x^{-2}$，所以 $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^{-2}=\frac{1}{2}$．故选 A．

4. D　由题意可设 $\lg E=\lambda M+\mu$，则 $\begin{cases}\lg(6.3\times10^{10})=4\lambda+\mu,\\ \lg(6.3\times10^{13})=6\lambda+\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=1.5,\\ \mu=4.8.\end{cases}$ 所以 $\lg E=1.5M+4.8$，所以 $E=10^{1.5M+4.8}$，所以当 $M=5.5$ 时，$E=10^{1.5\times5.5+4.8}=10^{13.05}=10^{0.05}\times10^{13}\approx1.1\times10^{13}$ 焦耳．故选 D．

5. C　由函数 $f(x)=\frac{x+1}{ax^2-2ax+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，得 $\forall x\in\mathbf{R},ax^2-2ax+1\neq0$ 恒成立．当 $a=0$ 时，$1\neq0$ 恒成立；当 $a\neq0$ 时，$\Delta=4a^2-4a<0$，解得 $0<a<1$．综上所述，实数 a 的取值范围为 $\{a|0\leqslant a<1\}$．故选 C．

6. B　由题意得函数 $y=x^2-ax+12$ 在 $[-1,3]$ 上单调递减，且在 $[-1,3]$ 上 $x^2-ax+12>0$ 恒成立，所以 $\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant3,\\ 3^2-3a+12>0,\end{cases}$ 解得 $6\leqslant a<7$，故 a 的取值范围是 $[6,7)$．故选 B．

7. A　若 $f(x)=\lg\frac{a+x}{1-ax}$ 是奇函数，则 $f(-x)+f(x)=0$，即 $\lg\frac{a-x}{1+ax}+\lg\frac{a+x}{1-ax}=0$，所以 $\lg\frac{a^2-x^2}{1-a^2x^2}=0$，所以 $\frac{a^2-x^2}{1-a^2x^2}=1$，所以 $a^2-x^2=1-a^2x^2$，所以 $a^2=1$，所以 $a=\pm1$，所以“$a=1$”是“$f(x)=\lg\frac{a+x}{1-ax}$ 是奇函数”的充分不必要条件．故选 A．

8. B　设 $f(x)=x\ln x,f'(x)=\ln x+1,f'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增．因为 $f(a)>f(b)>f(c)=1>0$，且在 $(0,1)$ 上 $f(x)<0$，所以 $a>b>c>1>\frac{1}{e}$，设 $g(x)=\frac{\ln x}{e^x},g'(x)=\frac{\frac{1}{x}e^x-e^x\cdot\ln x}{e^{2x}}=\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}=\frac{1-x\ln x}{xe^x}$，当 $x\geqslant c$ 时，$x\ln x\geqslant1$，所以 $g'(x)\leqslant0$，所以 $g(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(a)<g(b)<g(c)$，即 $\frac{\ln a}{e^a}<\frac{\ln b}{e^b}<\frac{\ln c}{e^c}$，所以 $e^{b+c}\ln a<e^{a+c}\ln b<e^{a+b}\ln c$．故选 B．

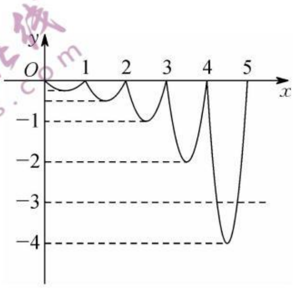
9. BCD　因为 $a<0<b<c$，所以 $a<-a,a+b<c-a$，故 A 错误；因为函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，因为 $0<b<c$，$0>a-b>a-c$，所以 $b^a>c^a,\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a-c}$，故 BC 均正确；因为 $a<0<b<c$，所以 $c-b>0,b-a>0$，所以 $c-a=(c-b)+(b-a)\geqslant2\sqrt{(c-b)(b-a)}$，当且仅当 $c-b=b-a$ 时，等号成立．故 D 正确．故选 BCD．

10. AD　对于 A，令 $x^5=t$，则 $x=\sqrt[5]{t}$，则 $f(t)=\sqrt[5]{t^3}$，故 $\forall x\in\mathbf{R},f(x)=\sqrt[5]{x^3}$ 唯一确定，故 A 成立；对于 B，令 $x=0$，则 $f(\cos0)=f(1)=0$，令 $x=2\pi$，则 $f(\cos2\pi)=f(1)=2\pi$，与函数定义不符，故 B 不成立；对于 C，令 $x=0$，则 $f(0)=0$，

令 $x=-1$，则 $f(0)=|-1|=1$，与函数定义不符，故 C 不成立；对于 D，$f(|x|)=x^2+1=|x|^2+1$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 唯一确定，符合函数定义，故 D 成立. 故选 AD.

11. AC　$f'(x)=e^x\ln(x+1)+\frac{e^x}{x+1}$，即 $g(x)=e^x\ln(x+1)+\frac{e^x}{x+1}$，则 $x>0$ 时，$g'(x)=e^x\left[\ln(x+1)+\frac{2x+1}{(x+1)^2}\right]>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 正确，B 错误；令 $F(x)=f(x+n)-f(x)-f(n)$，则 $F'(x)=f'(x+n)-f'(x)$，因为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $n>0$，所以 $F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\forall m\in(0,+\infty)$，$F(m)>F(0)=0$，所以 $f(m+n)>f(m)+f(n)$，故 C 正确，D 错误. 故选 AC.

12. ACD　由 $f(x)-x^2$ 是奇函数，$f(x)+x$ 是偶函数，得 $\begin{cases}f(-x)-(-x)^2=-f(x)+x^2,\\ f(-x)-x=f(x)+x,\end{cases}$ 解得 $f(x)=x^2-x$，所以 $f(3)=3^2-3=6$，故 A 正确；由 $g(x)=\begin{cases}f(x),0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2g(x-1),x>1,\end{cases}$ 当 $x\in(1,2]$ 时，$x-1\in(0,1]$，所以 $g(x)=2g(x-1)=2f(x-1)$；当 $x\in(2,3]$ 时，$g(x)=4f(x-2)$；当 $x\in(3,4]$ 时，$g(x)=2^3f(x-3)=8(x^2-7x+12)$，故 B 错误；以此类推，$g(x)$ 的图象如图：



当 $x\in(4,5]$ 时，$g(x)=16f(x-4)$，由 $g(x)\geqslant-3$，得 $16(x-4)(x-5)\geqslant-3$，解得 $x\leqslant\frac{17}{4}$ 或 $x\geqslant\frac{19}{4}$，又 $\forall x\in[0,t]$，$g(x)\geqslant-3$ 恒成立，所以 $0<t\leqslant\frac{17}{4}$，所以实数 t 的最大值为 $\frac{17}{4}$，故 C 正确；$g(x)=m(-2<m<-1)$ 在 $[0,5]$ 内的根为曲线 $y=g(x)(x\in[0,5])$ 与直线 $y=m(-2<m<-1)$ 交点的横坐标，由图知二者有四个交点，且分别关于直线 $x=\frac{7}{2}$ 和 $x=\frac{9}{2}$ 对称，故 $\sum_{i=1}^{4}x_i=16$，故 D 正确. 故选 ACD.

13. 存在一个矩形，其对角线不相等(或有的矩形对角线不相等)

14. $y=x-1$(2 分)　$\frac{2\,025}{2\,024}$(3 分)　由 $y=\ln x$，得 $y'=\frac{1}{x}$，所以曲线在点 $(1,0)$ 处的切线斜率 $k=1$，所以切线方程为 $y=x-1$. 由题意知在 $x=1$ 附近，$\ln x\approx x-1$，所以 $\ln\sqrt[2\,024]{e}\approx\sqrt[2\,024]{e}-1$，所以 $e^{\frac{1}{2\,024}}\approx\ln e^{\frac{1}{2\,024}}+1=\frac{1}{2\,024}+1=\frac{2\,025}{2\,024}$，即 $\sqrt[2\,024]{e}\approx\frac{2\,025}{2\,024}$.

15. 9　设切点为 (x_0,y_0)，因为 $y'=e^{x-1}$，所以 $e^{x_0-1}=1$，得 $x_0=1$，所以 $1+2a=2-b$，所以 $2a+b=1$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

16. $\frac{1}{e}$　由题意知 $f(x)=ax+xe^{-ax}-\ln x-1=e^{\ln x-ax}+ax-\ln x-1$，令 $t=\ln x-ax$，原函数变为 $y=e^t-t-1$. 令 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$，易知当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$g(x)\geqslant g(0)=0$，所以 $y_{\min}=0$，当且仅当 $t=0$ 时取最小值，所以当 $t=\ln x$

$-ax=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 0，此时 $a=\frac{\ln x}{x}$ 有解．令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$，所以 $a_{\max}=\frac{1}{e}$．

17．解：由题意知 $A\neq\varnothing$，故 $a\geqslant-2$，$B=\{y|-1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$．…… 1 分

(1) 当 $a=1$ 时，$A=[-2,1]$，$B=[-1,5]$，$C=[0,4]$，…… 2 分

所以 $A\cup B=[-2,5]$，$(\complement_{R}A)\cap C=(1,4]$．…… 4 分

(2) 当 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 时，$C=\{y|a^2\leqslant y\leqslant 4\}$，

又 $C\subseteq B$，故 $2a+3\geqslant 4$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，与 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 相矛盾；…… 6 分

当 $0<a\leqslant 2$ 时，$C=\{y|0\leqslant y\leqslant 4\}$，又 $C\subseteq B$，

故 $2a+3\geqslant 4$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$；…… 8 分

当 $a>2$ 时，$C=\{y|0\leqslant y\leqslant a^2\}$，又 $C\subseteq B$，

故 $2a+3\geqslant a^2$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 3$，所以 $2<a\leqslant 3$．

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},3\right]$．…… 10 分

18．解：(1) 令 $\sqrt{x+2}=t$，则 $t\geqslant 0$，$x=t^2-2$，…… 1 分

所以原函数变为 $y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}(t\geqslant 0)$．…… 3 分

故当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{9}{4}$，当 $t\to+\infty$，$y\to-\infty$，故原函数的值域为 $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$．…… 4 分

(2) 由题意知函数的定义域为 $[4,+\infty)$，$y=\sqrt{x}-\sqrt{x-4}=\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}$，…… 6 分

令 $t=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$，易知其在 $[4,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t\in[2,+\infty)$，

所以 $y\in(0,2]$，即原函数的值域为 $(0,2]$．…… 8 分

(3) 由题意知 $y>0$，函数的定义域为 $[0,9]$，且 $y^2=9+2\sqrt{x(9-x)}$，…… 9 分

因为 $x(9-x)=-x^2+9x=-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$，当 $0\leqslant x\leqslant 9$ 时，$0\leqslant x(9-x)\leqslant\frac{81}{4}$，…… 10 分

所以 $0\leqslant\sqrt{x(9-x)}\leqslant\frac{9}{2}$，所以 $9\leqslant y^2\leqslant 18$，…… 11 分

又 $y>0$，所以 $3\leqslant y\leqslant 3\sqrt{2}$，即函数的值域为 $[3,3\sqrt{2}]$．…… 12 分

19．解：(1) 因为 $f(x)=x^2-ax$，所以 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$，…… 1 分

所以当 $a=0$ 时，$f(x)$ 图象的对称轴为 y 轴，此时 $f(x)$ 为偶函数；…… 2 分

$a\neq 0$ 时，$f(-1)=1+a$，$f(1)=1-a$，则 $f(-1)\neq f(1)$，且 $f(-1)\neq -f(1)$，

所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数．…… 4 分

(2) 由题意知 $F(x)=x^2-ax+b\ln x$，所以 $F'(x)=2x-a+\frac{b}{x}$，…… 5 分

因为 $F(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处取得极值，所以 $\begin{cases}F'(1)=2-a+b=0,\\ F'(3)=6-a+\frac{b}{3}=0.\end{cases}$ ………………………… 6 分

所以 $\begin{cases}a=8,\\ b=6,\end{cases}$ 所以 $F(x)=x^2-8x+6\ln x$，$F(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$F'(x)=2x-8+\frac{6}{x}=\frac{2x^2-8x+6}{x}=\frac{2(x-1)(x-3)}{x}$. ………………………… 7 分

令 $F'(x)>0$，得 $0<x<1$，或 $x>3$；令 $F'(x)<0$，得 $1<x<3$， ………………………… 8 分

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 及 $(3,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $F(x)_{极大值}=F(1)=-7$，$F(x)_{极小值}=F(3)=6\ln 3-15$， ………………………… 10 分

又当 $x\to 0$ 时，$F(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to+\infty$，

要使 $F(x)=m$ 有 3 个不同的实数根，当且仅当 $6\ln 3-15<m<-7$，

故实数 m 的取值范围为 $(6\ln 3-15,-7)$. ………………………… 12 分

20. 解：(1)由 $f'(x)=2ax$，得 $f'(1)=2a$，又 $f(1)=a+b$，$g(0)=2$，

所以 $2a=a+b=2$，所以 $a=b=1$，所以 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=e^x+e^{-x}+x$， ………………………… 2 分

$g'(x)=e^x-e^{-x}+1$，易知当 $x\geqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， ………………………… 3 分

又 $g(f(x))\geqslant g(|x-3|)$，且 $f(x)>0$，$|x-3|\geqslant 0$，

所以 $f(x)\geqslant|x-3|$，即 $x^2+1\geqslant|x-3|$， ………………………… 4 分

所以 $\begin{cases}x<3,\\ x^2+1\geqslant 3-x,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x^2+1\geqslant x-3,\end{cases}$

解得 $x\leqslant-2$，或 $1\leqslant x<3$，或 $x\geqslant 3$.

故原不等式的解集为 $\{x\mid x\leqslant-2，或 x\geqslant 1\}$. ………………………… 6 分

(2)因为 $a=1$，$b=2$，所以 $g(x)=e^x+e^{-x}$，$f(x)=x^2+2$，

所以 $f'(x)=2x$，$g(x)\geqslant kf'(e^{-x}+2)-2$，即 $e^x+e^{-x}\geqslant 2k(e^{-x}+2)-2$， ………………………… 7 分

所以 $2k\leqslant\frac{e^x+e^{-x}+2}{e^{-x}+2}=\frac{(e^x)^2+2e^x+1}{2e^x+1}$，

设 $2e^x+1=t$，则 $t>1$，所以 $2k\leqslant\frac{t^2+2t+1}{4t}=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}+2\right)$，

因为 $t>1$，易知 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t+\frac{1}{t}>2$，

所以 $\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}+2\right)>\frac{1}{4}\times 4=1$，

所以 $2k\leqslant 1$，所以 $k\leqslant\frac{1}{2}$，即实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)$F(x)=mf(x)+2g(x)=\frac{m}{x^2}+2\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$F'(x)=-\frac{2m}{x^3}+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2m}{x^3}$. ………………………… 1 分

当 $m\leqslant 0$ 时，$F'(x)>0$ 恒成立，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$F(x)$ 不存在极值. ………………………… 2 分

当 $m>0$ 时，令 $F'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{m}$， ………………………………………… 3 分

当 $x>\sqrt{m}$时，$F'(x)>0$，当 $0<x<\sqrt{m}$时，$F'(x)<0$，

所以 $F(x)$在$(0,\sqrt{m})$上单调递减，在$(\sqrt{m},+\infty)$上单调递增， ………………………… 4 分

所以 $F(x)$存在一个极小值点 $x=\sqrt{m}$，无极大值点.

综上所述，m 的取值范围为$(0,+\infty)$. ………………………………………… 6 分

(2)由题知原不等式 $af(x)+g(x)\geqslant a$，可化为 $a\left(\frac{1}{x^2}-1\right)+\ln x\geqslant 0$， …………………… 7 分

法 1：当 $x=1$ 时，$a\in\mathbf{R}$ 恒成立，当 $x\in(0,1)$时，$a\geqslant\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x^2}}$， ………………………… 8 分

由(1)知函数 $y=\frac{1}{x^2}+\ln(x^2)$在 $x=1$ 处有最小值 1，所以 $1-\frac{1}{x^2}\leqslant\ln(x^2)$， ………………… 9 分

因为 $x\in(0,1)$，所以 $1-\frac{1}{x^2}<\ln(x^2)<0$， ………………………………………… 10 分

所以$\frac{\ln(x^2)}{1-\frac{1}{x^2}}<1$，即$\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x^2}}<\frac{1}{2}$， ………………………………………… 11 分

因为 $a\geqslant\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x^2}}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{2}$，

所以实数 a 的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………… 12 分

法 2：令 $h(x)=a\left(\frac{1}{x^2}-1\right)+\ln x$，则 $h(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,1]$恒成立，

$h(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$h'(x)=\frac{-2a}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{x^2-2a}{x^3}$.

①若 $a\leqslant 0$，显然 $h'(x)>0$ 对 $\forall x\in(0,1]$恒成立，$h(x)$在$(0,1]$上单调递增，

所以当 $x\in(0,1]$时，$h(x)\leqslant h(1)=0$. 可见 $a\leqslant 0$ 不符合题意. ………………………… 8 分

②若 $a>0$，则 $h'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{2a}$，$h'(x)>0\Leftrightarrow x>\sqrt{2a}$，

所以 $h(x)$在$(0,\sqrt{2a}]$上单调递减，在$(\sqrt{2a},+\infty)$上单调递增. ………………………… 9 分

(a)若 $\sqrt{2a}\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，$h(x)$在$(0,1]$上单调递减，

所以 $\forall x\in(0,1]$，$h(x)\geqslant h(1)=0$. 可见 $a\geqslant\frac{1}{2}$符合题意. ………………………… 10 分

(b)若 $\sqrt{2a}<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，$h(x)$在$(\sqrt{2a},1]$上单调递增.

对 $\forall x\in(\sqrt{2a},1)$，$h(x)<h(1)=0$. 可见 $0<a<\frac{1}{2}$不符合题意. ………………………… 11 分

综上所述，实数 a 的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)$f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x$ 的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{a(x-1)e^x}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{e^x(x-1)\left(a-\frac{x}{e^x}\right)}{x^2}$. ………………………………… 1 分

令 $g(x)=a-\frac{x}{e^x}$,则 $g'(x)=\frac{x-1}{e^x}$,易得 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=a-\frac{1}{e}$. …………………………………………………………………………………… 2 分

①当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时,$g(x)\geqslant g(1)=a-\frac{1}{e}\geqslant0$,当且仅当 $x=1,a=\frac{1}{e}$ 时取等号,所以当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 仅在 $x=1$ 处取得极值,共一个极值点;

…… 3 分

②当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时,$g(x)_{\min}=g(1)=a-\frac{1}{e}<0$,又 $g(0)=a>0$, $\ln\frac{1}{a^2}>\ln e^2=2>1$,且 $g\left(\ln\frac{1}{a^2}\right)=a+2a^2\ln a=a(1+2a\ln a)$, …………………………………………………………………………………………… 4 分

令 $h(a)=1+2a\ln a$,则 $h'(a)=2(\ln a+1)<0$,所以 $h(a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,所以 $h(a)>h\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{2}{e}>0$,

所以 $g\left(\ln\frac{1}{a^2}\right)>0$,由零点存在定理和 $g(x)$ 的单调性,$g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(1,\ln\frac{1}{a^2}\right)$ 上各有唯一零点,分别设为 m,n.

…… 5 分

当 $x\in(0,m)$ 时,$x-1<0,g(x)=a-\frac{x}{e^x}>0,f'(x)<0$;

当 $x\in(m,1)$ 时,$x-1<0,g(x)<0,f'(x)>0$;

当 $x\in(1,n)$ 时,$x-1>0,g(x)<0,f'(x)<0$;

当 $x\in(n,+\infty)$ 时,$x-1>0,g(x)>0,f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,m),(1,n)$ 上单调递减,在 $(m,1),(n,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=m,x=n$ 处取得极小值,在 $x=1$ 处取得极大值,共 3 个极值点.

综上所述,当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 有三个极值点,当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 仅有一个极值点. ……………………… 6 分

(2)因为 $f(x)$ 恰有三个极值点 $x_1,x_2,x_3\ (x_1<x_2<x_3)$,

由(1)知 $x_1=m,x_2=1,x_3=n$,

由 $\begin{cases}ae^{x_1}=x_1,\\ae^{x_3}=x_3\end{cases}$ 两式相除得到 $e^{x_3-x_1}=\frac{x_3}{x_1}$. ………………………………………………………………… 7 分

令 $t=\frac{x_3}{x_1}$,则 $t>1,x_3=tx_1,e^{(t-1)x_1}=t$,得 $x_1=\frac{\ln t}{t-1},x_3=\frac{t\ln t}{t-1}$,

又 $x_3-x_1=\ln t\leqslant1$,所以 $1<t\leqslant e$,则 $x_1+x_2+x_3=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}+1$. ………………………………………… 8 分

令 $k(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}+1$,其中 $1<t\leqslant e$,则 $k'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$, ………………………………………… 9 分

令 $\omega(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$,则 $\omega'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$,

所以 $\omega(t)$ 在 $(1,e]$ 上单调递增,则当 $1<t\leqslant e$ 时,$\omega(t)>\omega(1)=0$, ……………………………………… 11 分

即 $k'(t)>0$,故 $k(t)$ 在 $(1,e]$ 上单调递增,

所以当 $1<t\leqslant e$ 时,$k(t)\leqslant k(e)=\frac{2e}{e-1}$,故 $x_1+x_2+x_3$ 的最大值为 $\frac{2e}{e-1}$. ……………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。