

成都外国语学校高 2024 届 2022-2023 学年度 12 月月考

理科数学

一、单项选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题“ $\exists x_0 > 2, x_0^3 - 2x_0^2 < 0$ ”的否定为 ()

A. $\forall x > 2, x^3 - 2x^2 \geq 0$

B. $\forall x > 2, x^3 - 2x^2 > 0$

C. $\exists x_0 < 2, x_0^3 - 2x_0^2 \geq 0$

D. $\exists x_0 < 2, x_0^3 - 2x_0^2 > 0$

【答案】A

【解析】

【分析】含有一个量词的命题的否定步骤为：改量词，否结论。

【详解】改量词： $\exists x_0 > 2$ 改为 $\forall x > 2$,

否结论： $x_0^3 - 2x_0^2 < 0$ 否定为 $x^3 - 2x^2 \geq 0$,

所以 $\exists x_0 > 2, x_0^3 - 2x_0^2 < 0$ 的否定形式为： $\forall x > 2, x^3 - 2x^2 \geq 0$.

故选：A.

2. 同时掷 3 枚硬币，那么互为对立事件的是 ()

A. 至少有 1 枚正面和最多有 1 枚正面

B. 最多 1 枚正面和恰有 2 枚正面

C. 至多 1 枚正面和至少有 2 枚正面

D. 至少有 2 枚正面和恰有 1 枚正面

【答案】C

【解析】

【分析】

分别列举出至少有 1 枚正面和最多有 1 枚正面，最多 1 枚正面和恰有 2 枚正面，至多 1 枚正面和至少有 2 枚正面以及至少有 2 枚正面和恰有 1 枚正面的情况，利用定义排除可得选项。

【详解】同时掷 3 枚硬币，至少有 1 枚正面包括有一正两反，两正一反，三正三种情况，

最多有 1 枚正面包括一正两反，三反，两种情况，故 A 不正确，

最多有 1 枚正面包括一正两反，三反与恰有 2 枚正面是互斥的但不是对立事件，故 B 不正确，

至多 1 枚正面一正两反，三反，至少有 2 枚正面包括 2 正和三正，故 C 正确，

至少有 2 枚正面包括 2 正和三正，与恰有 1 枚正面是互斥事件，故 D 不正确，

故选：C.

【点睛】本题考查互斥事件和对立事件的定义，考查列举法的应用，属于基础题.

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{5}{3}$ ，且其虚轴长为 8，则双曲线 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意建立 a, b, c 的方程，求出 a, b 即可得到结果.

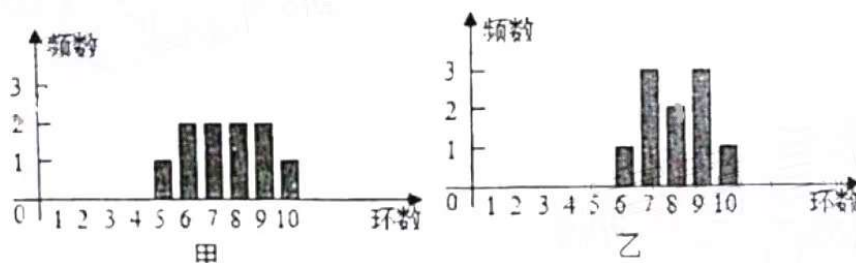
【详解】根据题意得到：
$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \\ 2b = 8 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}, \text{ 故方程为: } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

故选：D

【点睛】方法点睛：求双曲线方程的方法一般就是根据条件建立 a, b, c 的方程，求出 a^2, b^2 即可，注意

$a^2 = -b^2 + c^2, e = \frac{c}{a}$ 的应用.

4. 已知在一次射击预选赛中，甲、乙两人各射击 10 次，两人成绩的条形统计图如图所示，则下列四个选项中判断不正确的是



- A. 甲的成绩的平均数小于乙的成绩的平均数
B. 甲的成绩的中位数小于乙的成绩的中位数
C. 甲的成绩的方差大于乙的成绩的方差
D. 甲的成绩的极差小于乙的成绩的极差

【答案】D

【解析】

【分析】根据条形统计图可分别计算出甲、乙的平均数、中位数、极差，从而判断出 A, B, D 的正误；根据

成绩的分散程度可判断C的正误.

【详解】甲的成绩的平均数为: $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{10}(5+6 \times 2+7 \times 2+8 \times 2+9 \times 2+10) = 7.5$

乙的成绩的平均数为: $\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1}{10}(6+7 \times 3+8 \times 2+9 \times 3+10 \times 1) = 8$

∴ 甲的成绩的平均数小于乙的成绩的平均数, 故A正确;

甲的成绩的中位数为: $\frac{7+8}{2} = 7.5$; 乙的成绩的中位数为: $\frac{8+8}{2} = 8$

∴ 甲的成绩的中位数小于乙的成绩的中位数, 故B正确;

由条形统计图得甲的成绩相对分散, 乙的成绩相对稳定,

∴ 甲的成绩的方差大于乙的成绩的方差, 故C正确;

甲的成绩的极差为: $10-5=5$; 乙的成绩的极差为: $10-6=4$

∴ 甲的成绩的极差大于乙的成绩的极差, 故D不正确.

本题正确选项: D

【点睛】本题考查根据条形统计图判断平均数、中位数、极差和方差的问题, 属于基础题.

5. 已知 ABC 的三个顶点分别为 $A(5, 3, 2)$, $B(1, -1, 3)$, $C(-1, -3, 5)$, 则 BC 边上的中线长为 ()

- A. $2\sqrt{6}$ B. $3\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】求得 BC 的中点坐标, 利用两点间的距离公式即可求得答案.

【详解】由题意 $A(5, 3, 2)$, $B(1, -1, 3)$, $C(-1, -3, 5)$, 可得 BC 的中点坐标为 $D(0, -2, 4)$,

所以 BC 边上的中线长为 $|AD| = \sqrt{(5-0)^2 + (3+2)^2 + (2-4)^2} = 3\sqrt{6}$,

故选: B.

6. 现从某学校 450 名同学中用随机数表法随机抽取 30 人参加一项活动. 将这 450 名同学编号为 001、002、...、449、450, 要求从下表第 2 行第 5 列的数字开始向右读, 则第 5 个被抽到的编号为 ()

16 22 77 94 39 49 54 43 54 82 17 37 93 23 78 87 35 20 96 43 84 26 34 91 64

84 42 17 53 31 57 24 55 06 88 77 04 74 47 67 21 76 33 50 25 83 92 12 06 76

63 01 63 78 59 16 95 55 67 19 98 10 50 71 75 12 86 73 58 07 44 39 52 38 79

- A. 074 B. 447 C. 474 D. 476

【答案】B

【解析】

【分析】利用随机数表法列举出样本的前5个个体的编号，即可得解。

【详解】从随机数表第2行第5列开始，从左到右依次选取三个数字，去掉其中重复及大于450的数，
样本的前5个个体的编号依次为175、331、068、047、447。

故选：B.

7. 已知 m 为实数，直线 $l_1: mx + y - 1 = 0$ ， $l_2: (3m - 2)x + my - 2 = 0$ ，则“ $m = 1$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的

- A. 充要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据直线平行的等价条件，求出 m 的值，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可。

【详解】当 $m = 1$ 时，两直线方程分别为直线 $l_1: x + y - 1 = 0$ ， $l_2: x + y - 2 = 0$ 满足 $l_1 // l_2$ ，即充分性成立，
当 $m = 0$ 时，两直线方程分别为 $y - 1 = 0$ ，和 $-2x - 2 = 0$ ，不满足条件。

当 $m \neq 0$ 时，则 $l_1 // l_2 \Rightarrow \frac{3m - 2}{m} = \frac{m}{1} \neq \frac{-2}{-1}$ ，

由 $\frac{3m - 2}{m} = \frac{m}{1}$ 得 $m^2 - 3m + 2 = 0$ 得 $m = 1$ 或 $m = 2$ ，

由 $\frac{m}{1} \neq \frac{-2}{-1}$ 得 $m \neq 2$ ，则 $m = 1$ ，

即“ $m = 1$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的充要条件，

故答案为：A

【点睛】(1) 本题主要考查充要条件的判断，考查两直线平行的等价条件，意在考查学生对这些知识的掌握水平和分析推理能力。(2) 本题也可以利用下面的结论解答，直线 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 和直线

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 平行，则 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ 且两直线不重合，求出参数的值后要代入检验看两直线是否重合。

8. 已知一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，标准差为 s ，则数据 $2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_n + 1$ 的平均数和方差分别为 ()

- A. $2\bar{x} + 1$ ， $2s$
B. $2\bar{x}$ ， $2s$
C. $2\bar{x} + 1$ ， $4s^2$
D. $2\bar{x}$ ， $4s^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据数据的平均数与方差的性质求解即可。

【详解】由题知, $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\bar{x}$, $s=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}$,

所以, $2x_1+1, 2x_2+1, \dots, 2x_n+1$ 的平均数为 $\frac{2x_1+1+2x_2+1+\cdots+2x_n+1}{n}=2\bar{x}+1$,

$2x_1+1, 2x_2+1, \dots, 2x_n+1$ 的方差分别 $\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n(2x_i+1-2\bar{x}-1)^2=\frac{1}{n}\cdot 4\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2=4s^2$.

故选: C.

9. 柜子里有红, 白, 黑三双不同的手套, 从中随机选 2 只, 则取出的手套成双的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用组合求出所有的情况数及符合要求的情况数, 再利用古典概型求解即可.

【详解】任取两只手套有 $C_6^2=15$ 种方法,

若两只手套成双, 有 $C_3^1=3$ 种方法,

则取出的手套成双的概率为 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

故选: B.

10. 已知点 P 是圆 $C: x^2+y^2-2x-4y+3=0$ 的动点, 直线 $l: x-y-3=0$ 上存在两点 A, B , 使得

$\angle APB \geq \frac{\pi}{2}$ 恒成立, 则线段 AB 长度的最小值是 ()

- A. $6\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{21}$

【答案】A

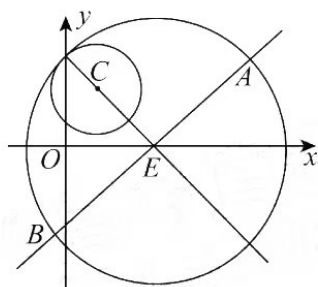
【解析】

【分析】根据几何的思路得到当以 AB 为直径的圆与圆 C 内切, 且 $CE \perp AB$ 时, 线段 AB 长度最小, 然后求 AB 即可.

【详解】由圆 $C: x^2+y^2-2x-4y+3=0$ 得圆心 $C(1, 2)$, 半径 $r=\sqrt{2}$.

因为直线 $l: x-y-3=0$ 上存在两点 A, B , 使得 $\angle APB \geq \frac{\pi}{2}$ 恒成立, 则以 AB 为直径的圆包含圆 C .

当 AB 长度最小时, 两圆内切, 设 AB 中点为 E , 则此时 $CE \perp AB$.



$$\text{所以 } |AB| = 2(|CE| + r) = 2\left(\frac{|1-2-3|}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}.$$

故选：A

11. 甲、乙两艘轮船都要在某个泊位停靠 6 个小时，假定它们在一昼夜的时间中随机到达，若两船有一艘在停泊位时，另一艘船就必须等待，则这两艘轮船停靠泊位时都不需要等待的概率为（ ）

- A. $\frac{11}{16}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{5}{16}$

【答案】B

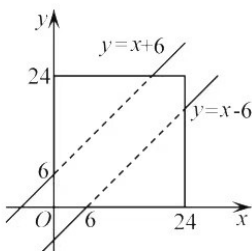
【解析】

【分析】先确定这是几何概型问题，可设甲乙分别先到的时间，建立他们之间不需要等待的关系式，作出符合条件的可行域，并求其面积，根据几何概型的概率公式计算可得答案.

【详解】设甲、乙到达停泊点的时间分别是 x 、 y 点，

则甲先到乙不需要等待须满足 $x+6 < y$ ，乙先到甲不需要等待须满足 $y+6 < x$ ，

作出不等式组
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 24 \\ 0 \leq y \leq 24 \\ y > x+6 \\ y < x-6 \end{cases}$$
 表示的可行域如图（阴影部分）：



正方形的面积为 $24 \times 24 = 576$ ，阴影部分面积为 $2 \times \frac{1}{2} \times 18 \times 18 = 324$ ，

故这两艘轮船停靠泊位时都不需要等待的概率 $\frac{324}{576} = \frac{9}{16}$ ，

故选：B

12. F_1, F_2 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 点 M 为椭圆 E 上一点, 点 N 在 x 轴上, 满足

$\angle F_1MN = \angle F_2MN = 60^\circ$, 若 $3\overrightarrow{MF_1} + 5\overrightarrow{MF_2} = \lambda\overrightarrow{MN}$, 则椭圆 E 的离心率为 ()

- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{7}{8}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据给定条件, 结合向量加法的平行四边形法则确定 $|\overrightarrow{MF_1}|$ 与 $|\overrightarrow{MF_2}|$ 的关系, 再利用椭圆定义结合余弦定理求解作答.

【详解】由 $3\overrightarrow{MF_1} + 5\overrightarrow{MF_2} = \lambda\overrightarrow{MN}$ 得, 以 $3\overrightarrow{MF_1}$ 、 $5\overrightarrow{MF_2}$ 为一组邻边的平行四边形的以点 M 为起点的对角线对应的向量与 $\overrightarrow{MN}$ 共线,

由 $\angle F_1MN = \angle F_2MN = 60^\circ$ 知, MN 平分 $\angle F_1MF_2$,

因此这个平行四边形是菱形, 有 $3|\overrightarrow{MF_1}| = 5|\overrightarrow{MF_2}|$,

又 $|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = 2a$, 于是得 $|\overrightarrow{MF_1}| = \frac{5}{4}a, |\overrightarrow{MF_2}| = \frac{3}{4}a$,

令椭圆 E 的半焦距为 c , 在 $\triangle F_1MF_2$ 中, $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$,

由余弦定理得: $|F_1F_2|^2 = |\overrightarrow{MF_1}|^2 + |\overrightarrow{MF_2}|^2 - 2|\overrightarrow{MF_1}||\overrightarrow{MF_2}|\cos\angle F_1MF_2$,

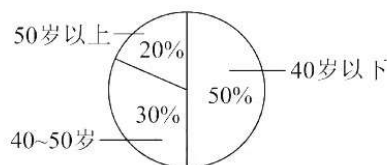
即 $4c^2 = (\frac{5}{4}a)^2 + (\frac{3}{4}a)^2 + \frac{5}{4}a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{49}{16}a^2$,

则有 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{49}{64}$, 解得 $e = \frac{7}{8}$, 所以椭圆 E 的离心率为 $\frac{7}{8}$.

故选: D

二、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 2020 年是新冠疫苗接种高峰期, 接种重点人群是年龄在 18-59 岁的健康人员. 某单位 300 名职工的年龄分布情况如图所示, 现要从中抽取 30 名职工作为样本了解新冠疫苗接种情况, 则 40 岁以下年龄段应抽取 _____ 人.



【答案】15

【解析】

【分析】根据扇形统计图得到 40 岁以下年龄段所占比例，从而得到应抽取的人数。

【详解】从扇形统计图可看出 40 岁以下年龄段所占比例为 50%，

故从中抽取 30 名职工作为样本，40 岁以下年龄段应抽取人数为 $30 \times 50\% = 15$ 。

故答案为：15

14. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $M(1, m) (m > 0)$ 到其焦点的距离为 5，则实数 m 的值是_____

【答案】4

【解析】

【分析】由抛物线定义及点 M 到焦点的距离求得 p ，把点 M 代入抛物线方程即可求。

【详解】抛物线准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$ ，由抛物线定义知 $1 + \frac{p}{2} = 5$ ，解得 $p = 8$ 。

把 $M(1, m)$ 代入 $y^2 = 16x$ 得 $m = 4 (m > 0)$ 。

故答案为：4。

15. 已知点 $P(-2, 2)$ ，直线 $l: (\lambda + 2)x - (\lambda + 1)y - 4\lambda - 6 = 0$ ，则点 P 到直线 l 的距离的取值范围为_____。

【答案】 $[0, 4\sqrt{2})$

【解析】

【分析】

化简直线为 $(2x - y - 6) + \lambda(x - y - 4) = 0$ ，得出直线 l 过定点 $M(2, -2)$ ，根据点 $|PM|$ 的长度，进而求得点 P 到直线 l 的距离的取值范围。

【详解】把直线 $l: (\lambda + 2)x - (\lambda + 1)y - 4\lambda - 6 = 0$ 化为 $(2x - y - 6) + \lambda(x - y - 4) = 0$ ，

联立方程组 $\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ ，即直线 l 过定点 $M(2, -2)$ ，

又由 $k_{PM} = \frac{-2-2}{2-(-2)} = -1$ ，且 $\frac{\lambda+2}{\lambda+1} \times (-1) \neq -1$ ，所以直线 PM 与 l 不垂直，

所以点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $|PM| < \sqrt{(2+2)^2 + (-2-2)^2} = 4\sqrt{2}$ ，

即点 P 到直线 l 的距离的取值范围为 $[0, 4\sqrt{2})$

故答案为： $[0, 4\sqrt{2})$ 。

【点睛】本题主要考查了直线系方程的应用，以及两点间的距离公式的应用，着重考查推理与运算能力，属于中档试题。

16. 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德被称为亚历山大时期数学三巨匠，他对圆锥曲线有深刻而系统的研究，主要研究成果在他的代表作《圆锥曲线》一书，阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是：已知动点 M 与两个定点 A, B 的距离之比为 $\lambda (\lambda > 0, \lambda \neq 1)$ ，那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆。

若已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 和点 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ，点 $B(4, 2)$ ， M 为圆 O 上的动点，则 $2|MA| + |MB|$ 的最小值为_____

【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】设 $M(x, y)$ ，令 $2|MA| = |MC|$ ，根据圆 $x^2 + y^2 = 1$ 是关于点 A, C 的阿波罗尼斯圆，且 $\lambda = \frac{1}{2}$ ，求得点 C 坐标，再连接 BC ，由直线段最短求解，整理得：

【详解】设 $M(x, y)$ ，令 $2|MA| = |MC|$ ，则 $\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{1}{2}$ ，

由题知圆 $x^2 + y^2 = 1$ 是关于点 A, C 的阿波罗尼斯圆，且 $\lambda = \frac{1}{2}$ ，

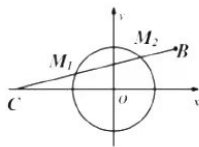
$$\text{设点 } C(m, n), \text{ 则 } \frac{|MA|}{|MC|} = \frac{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{整理得: } x^2 + y^2 + \frac{2m+4}{3}x + \frac{2n}{3}y = \frac{m^2 + n^2 - 1}{3},$$

$$\text{比较两方程可得: } \frac{2m+4}{3} = 0, \frac{2n}{3} = 0, \frac{m^2 + n^2 - 1}{3} = 1,$$

即 $m = -2, n = 0$ ，所以点 $C(-2, 0)$ ，

如图所示：



当点 M 位于图中 M_1, M_2 的位置时， $2|MA| + |MB| = |MC| + |MB|$ 的值最小，最小为 $2\sqrt{10}$ 。

故答案为： $2\sqrt{10}$

三、解答题：本大题共 6 个小题，第一题 10 分，其余各题 12 分

17. 已知命题 p : 方程: $\frac{x^2}{2m} + \frac{y^2}{1-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 命题 q : 双曲线 $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{m} = 1$ 的离心率

$e \in (1, 2)$, 若 “ $p \wedge q$ ” 为假命题, “ $p \vee q$ ” 为真命题, 求 m 的取值范围.

【答案】 $\frac{1}{3} \leq m < 15$

【解析】

【分析】 求出当命题 p 为真命题时 m 的取值范围, 以及当命题 q 为真命题时 m 的取值范围, 分析可知 p 、 q 中一真一假, 分 p 真 q 假、 p 假 q 真两种情况讨论, 综合可得出实数 m 的取值范围.

【详解】 解: 若命题 p 为真命题, 则 $\begin{cases} 1-m > 2m \\ 2m > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < m < \frac{1}{3}$;

若命题 q 为真命题, 则 $\begin{cases} m > 0 \\ e = \frac{\sqrt{m+5}}{\sqrt{5}} \in (1, 2) \end{cases}$, 解得 $0 < m < 15$.

因为 “ $p \wedge q$ ” 为假命题, “ $p \vee q$ ” 为真命题, 则 p 、 q 中一真一假,

若 p 真 q 假, 则 $\begin{cases} 0 < m < \frac{1}{3} \\ m \leq 0 \text{ 或 } m \geq 15 \end{cases}$, 则 $m \in \emptyset$;

若 p 假 q 真, 则 $\begin{cases} m \leq 0 \text{ 或 } m \geq \frac{1}{3} \\ 0 < m < 15 \end{cases}$, 可得 $\frac{1}{3} \leq m < 15$.

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}, 15\right)$.

18. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \sqrt{3}x$, 且一个焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求双曲线方程;

(2) 过点 $(0, 1)$ 的直线 l 与双曲线交于异支两点 P, Q , $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, 求点 M 的轨迹方程.

【答案】 (1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $y^2 - 2y - 3x^2 = 0 (y \neq 2)$

【解析】

【分析】 (1) 利用渐近线方程以及焦点到直线的距离即可求解.

(2) 首先设出直线方程, 与椭圆联立后, 设出 $M(x, y)$, 利用向量的坐标运算以及韦达定理即可求解轨迹

方程，最后确定好范围即可.

【小问 1 详解】

由渐近线为 $y = \sqrt{3}x$ 知, $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ①, 又焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 即 $(c, 0)$ 到直线 $y = \sqrt{3}x$ 的距离

$\frac{|\sqrt{3}c|}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}c}{2} = \sqrt{3}$, 所以 $c = 2$, $a^2 + b^2 = 4$ ②, 联立①②, 解得 $a^2 = 1$, $b^2 = 3$, 则双曲线方程为

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

【小问 2 详解】

因为直线 l 与双曲线交于异支两点 P, Q , 所以直线 l 的斜率必存在, 且经过 $(0, 1)$ 点, 可设直线 $l: y = kx + 1$,

与双曲线联立得: $(3 - k^2)x^2 - 2kx - 4 = 0$,

$$\text{设 } M(x, y), P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则有 } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{2k}{3 - k^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{3 - k^2} < 0 \end{cases} \quad \text{解得 } -\sqrt{3} < k < \sqrt{3},$$

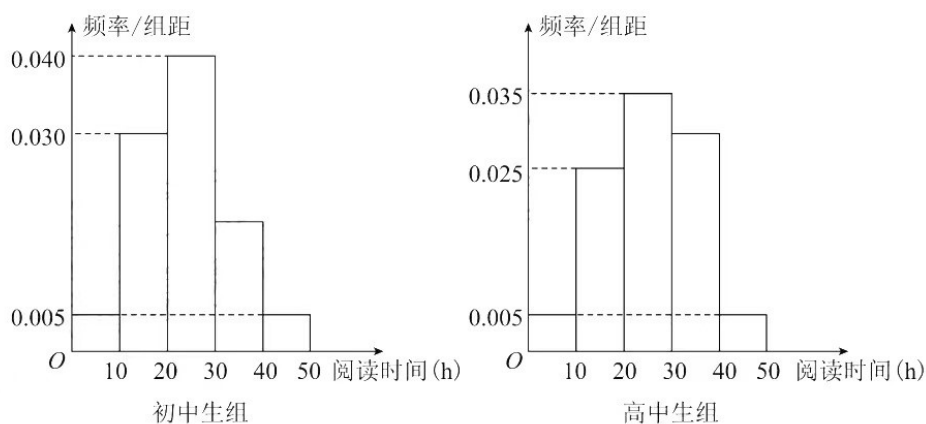
$$\text{由 } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \text{ 知, } \begin{cases} x = x_1 + x_2 = \frac{2k}{3 - k^2} \\ y = y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2 = \frac{6}{3 - k^2} \end{cases}$$

两式相除得 $\frac{x}{y} = \frac{k}{3}$, 即 $k = \frac{3x}{y}$ 代入 $y = \frac{6}{3 - k^2}$ 得 $y^2 - 2y - 3x^2 = 0$,

又 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$, 所以 $y \neq 0$,

所以点 M 的轨迹方程为 $y^2 - 2y - 3x^2 = 0 (y \neq 0)$.

19. 某中学有初中学生 1800 人, 高中学生 1200 人, 为了解全校学生本学期开学以来 (60 天) 的课外阅读时间, 学校采用分层抽样方法, 从中抽取了 100 名学生进行问卷调查. 将样本中的“初中学生”和“高中学生”按学生的课外阅读时间 (单位: 小时) 各分为 5 组: $[0, 10)$, $[10, 20)$, $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50]$, 得其频率分布直方图如图所示.



- (1) 估计全校学生中课外阅读时间在 $[30, 40)$ 小时内的总人数是多少；
- (2) 从课外阅读时间不足 10 个小时的样本学生中随机抽取 3 人，求至少有 2 个初中生的概率；
- (3) 国家规定：初中学生平均每人每天课外阅读时间不小于半小时，若该校初中学生课外阅读时间小于国家标准，则学校应当增加课外阅读时间. 根据以上抽样调查数据，该校是否需要增加初中学生课外阅读时间？

【答案】(1) 720 人

(2) $\frac{7}{10}$

(3) 该校需要增加初中学生课外阅读时间.

【解析】【分析】(1) 根据频率分布直方图可得阅读时间在 $[30, 40)$ 小时内的频率，进而可求人数，

(2) 根据分层抽样的抽样比计算抽取的初高中生的人数，进而根据列举法求解个数，由古典概型的概率计算公式即可求解，

(3) 根据频率分布直方图计算阅读的平均数，即可求解.

【小问 1 详解】初中生中，阅读时间在 $[30, 40)$ 小时内的频率为 $1 - (0.005 + 0.03 + 0.04 + 0.005) \times 10 = 0.20$ ，

$\therefore$ 所有的初中生中，阅读时间在 $[30, 40)$ 小时内的学生约有 $0.2 \times 1800 = 360$ 人；

同理，高中生中，阅读时间在 $[30, 40)$ 小时内的频率为 $1 - (0.005 + 0.025 + 0.035 + 0.005) \times 10 = 0.30$ ，

学生人数约有 $0.30 \times 1200 = 360$ 人，

该校所有学生中，阅读时间在 $[30, 40)$ 小时内的学生人数约有 $360 + 360 = 720$ 人.

【小问 2 详解】

由分层抽样知，抽取的初中生有 $100 \times \frac{1800}{1800 + 1200} = 60$ 名，高中生有 $100 - 60 = 40$ 名，

记“从阅读时间不足 10 个小时的样本学生中随机抽取 3 人，至少抽到 2 名初中生”为事件 M ，

初中生中，阅读时间不足 10 个小时的学生频率为 $0.005 \times 10 = 0.05$ ，样本人数为 $0.05 \times 60 = 3$ 人；

高中生中，阅读时间不足 10 个小时的学生频率为 $0.005 \times 10 = 0.05$ ，样本人数为 $0.05 \times 40 = 2$ 人。

记这 3 名初中生为 A、B、C，这 2 名高中生为 d、e，

则从阅读时间不足 10 个小时的样本学生中随机抽取 3 人，所有可能结果共 10 种，

即：ABC，ABd，ABe，ACd，ACe，Ade，BCd，BCe，Bde，Cde；

而事件 A 的结果有 7 种，

它们是：ABC，ABd，ABe，ACd，ACe，BCd，BCe；

$\therefore$ 至少抽到 2 名初中生的概率为 $P(M) = \frac{7}{10}$ ；

【小问 3 详解】

60 天内，初中生平均每人阅读时间为 $5 \times 0.05 + 15 \times 0.3 + 25 \times 0.4 + 35 \times 0.2 + 45 \times 0.05 = 24$ （小时），

国家标准下 60 天内初中生每人需阅读 $60 \times 0.5 = 30$ （小时），

因为 $24 < 30$ ，该校需要增加初中学生课外阅读时间。

20. 现代物流成为继劳动力、自然资源外影响企业生产成本及利润的重要因素.某企业去年前八个月的物流成本和企业利润的数据（单位：万元）如表所示：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8
物流成本 x	83	83.5	80	86.5	89	84.5	79	86.5
利润 y	114	116	106	122	132	114	m	132

根据最小二乘法公式求得线性回归方程为 $\hat{y} = 3.2x - 151.8$ 。

(1) 若 9 月份物流成本是 90 万元，预测 9 月份利润；

(2) 经再次核实后发现 8 月份真正利润应该为 116 万元，重新预测 9 月份的利润。

附： $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 78880$ ， $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 56528$ ， $\bar{x} = 84$ ， $\sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2 = 904$ 。

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

【答案】(1) 136.2 万元

(2) 131.2 万元

【解析】

【分析】(1) 直接利用回归方程预测求解；

(2)根据题意, 结合已知数据利用最小二乘法公式求解即可.

【小问1详解】

9月份利润: $\hat{y} = 3.2 \times 90 - 151.8 = 136.2$ 万元.

【小问2详解】

由已知数据可得: $\bar{x} = \frac{83+83.5+80+86.5+89+84.5+79+86.5}{8} = 84$,

因为点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 在回归直线 $\hat{y} = 3.2x - 151.8$ 上, 所以 $\bar{y} = 3.2 \times 84 - 151.8 = 117$,

所以 $114+116+106+122+132+114+m+132 = 117 \times 8$,

因为8月份的真正利润应该为116万元,

此时 $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 78880 - 86.5 \times (132 - 116) = 77496$, $\bar{y} = \frac{117 \times 8 - (132 - 116)}{8} = 115$

又 $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 56528$, $\bar{x} = 84$, 所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{77496 - 8 \times 84 \times 115}{56528 - 8 \times 84^2} = 2.7$,

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 115 - 2.7 \times 84 = -111.8$,

所以数据核实后的新的线性回归方程为 $\hat{y} = 2.7x - 111.8$,

令 $x = 90$, 得 $\hat{y} = 2.7 \times 90 - 111.8 = 131.2$ 万元.

所以重新预测9月份的利润为131.2万元.

21. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 $P(0, 2)$ 的动直线 l 与抛物线相交于 A, B 两点. 当 l 经过点 F 时, 点 A 恰好为线段 PF 中点.

(1) 求 p 的值;

(2) 是否存在定点 T , 使得 $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB}$ 为常数? 若存在, 求出点 T 的坐标及该常数; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $\sqrt{2}$

(2) 存在: $T(\sqrt{2}, 4)$, $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 18$

【解析】【分析】(1) 结合中点坐标公式表示出点 A 的坐标代入抛物线的方程即可求出结果;

(2) 设出直线的方程与抛物线联立, 进而结合根与系数的关系得到 $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB}$ 的表达式, 从而可得

$$\begin{cases} 4m + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}n = 0 \\ 4 - 2\sqrt{2}m = 0 \end{cases}, \text{ 因此解方程组即可求出结果.}$$

【小问1详解】

因为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $P(0, 2)$, 且点 A 恰好为线段 PF 中点, 所以 $A\left(\frac{p}{4}, 1\right)$, 又因为 A 在抛物线上, 所以 $1^2 = 2p \cdot \frac{p}{4}$,

即 $p^2 = 2$, 解得 $p = \sqrt{2}$

【小问2详解】

设 $T(m, n)$, 可知直线 l 斜率存在; 设 $l: y = kx + 2$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

联立方程得: $\begin{cases} y^2 = 2\sqrt{2}x \\ y = kx + 2 \end{cases}$, 所以 $k^2 y^2 - 2\sqrt{2}y + 4\sqrt{2} = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = \frac{2\sqrt{2}}{k}$, $y_1 y_2 = \frac{4\sqrt{2}}{k}$,

又: $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = (x_1 - m)(x_2 - m) + (y_1 - n)(y_2 - n)$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} y_1^2 - m\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} y_2^2 - m\right) + (y_1 - n)(y_2 - n)$

$= \frac{1}{8} y_1^2 y_2^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} m (y_1^2 + y_2^2) + m^2 - n(y_1 + y_2) + n^2$

$= \frac{4}{k^2} - \frac{\sqrt{2}}{4} m \left(\frac{8}{k^2} - \frac{8\sqrt{2}}{k}\right) + m^2 + \frac{4\sqrt{2}}{k} - \frac{2\sqrt{2}n}{k} + n^2$

$= \frac{4 - 2\sqrt{2}m}{k^2} + \frac{4m + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}n}{k} + m^2 + n^2$,

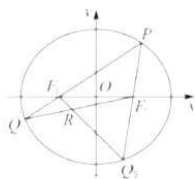
令 $\begin{cases} 4m + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}n = 0 \\ 4 - 2\sqrt{2}m = 0 \end{cases}$, 解之得: $\begin{cases} m = \sqrt{2} \\ n = 4 \end{cases}$, 即 $T(\sqrt{2}, 4)$, 此时 $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = m^2 + n^2 = 18$

【点睛】(1)直线与抛物线的位置关系和直线与椭圆、双曲线的位置关系类似, 一般要用到根与系数的关系;

(2)有关直线与抛物线的弦长问题, 要注意直线是否过抛物线的焦点, 若过抛物线的焦点, 可直接使用公式 $|AB| = x_1 + x_2 + p$, 若不过焦点, 则必须用一般弦长公式.

22. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 设 P 是第一象限内椭圆 Γ 上一点, PF_1, PF_2 的延

长线分别交椭圆 Γ 于点 Q_1, Q_2 , 直线 $Q_1 F_2$ 与 $Q_2 F_1$ 交于点 R .



(1) 当 PF_2 垂直于 x 轴时, 求直线 Q_1Q_2 的方程;

(2) 记 F_1Q_1R 与 F_2Q_2R 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $S_2 - S_1$ 的最大值.

【答案】(1) $3x + 10y + 12 = 0$

(2) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意分别计算 P, Q_2 的坐标, 进而根据 PF_1 的直线方程可得 $Q_1\left(-\frac{13}{7}, -\frac{9}{14}\right)$, 进而可得直线 Q_1Q_2 的方程;

(2) 设 $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$, 直线 PF_1 的方程为 $x + 1 = ty$, 联立直线与椭圆的方程可得 y_1, y_2 , 进而可得 $S_2 - S_1 = \frac{12x_0y_0}{25 - 4x_0^2}$, 令 $x_0 = 2\cos\theta, y_0 = \sqrt{3}\sin\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 再根据基本不等式求最大值即可.

【小问 1 详解】

由题意可得 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 当 PF_2 垂直于 x 轴时,

则 Q_2 的纵坐标为 $y = -\frac{b^2}{a} = -\frac{3}{2}$,

所以 $Q_2\left(1, -\frac{3}{2}\right), P\left(1, \frac{3}{2}\right)$,

$\therefore k_{PF_1} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - (-1)} = \frac{3}{4}$, 直线 PF_1 的方程为: $y = \frac{3}{4}(x + 1)$,

联立 $\begin{cases} y = \frac{3}{4}(x + 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{13}{7} \\ y = -\frac{9}{14} \end{cases}$, 则 $Q_1\left(-\frac{13}{7}, -\frac{9}{14}\right)$,

$$\therefore k_{Q_1Q_2} = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{9}{14}}{1 + \frac{13}{7}} = -\frac{3}{10},$$

$$\therefore \text{直线 } Q_1Q_2 \text{ 的方程为 } y + \frac{3}{2} = -\frac{3}{10}(x-1), \text{ 即 } 3x+10y+12=0;$$

【小问 2 详解】

设 $P(x_0, y_0) (x_0 > 0, y_0 > 0)$, $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$, 设直线 PF_1 的方程为 $x+1=ty$, 其中 $t = \frac{x_0+1}{y_0}$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x+1=ty \\ x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 并整理可得, } (3t^2+4)y^2 - 6ty - 9 = 0,$$

$$\text{由韦达定理可得, } y_0y_1 = \frac{-9}{3t^2+4} = \frac{-9y_0^2}{3(x_0+1)^2+4y_0^2},$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1, \text{ 则 } 3x_0^2 + 4y_0^2 = 12,$$

$$\therefore y_1 = \frac{-9y_0}{3(x_0+1)^2+4y_0^2} = \frac{-9y_0}{12+6x_0+3} = \frac{-3y_0}{5+2x_0},$$

$$\text{同理可得 } y_2 = \frac{-3y_0}{5-2x_0}.$$

$$\therefore S_2 - S_1 = S_{Q_2F_1F_2} - S_{Q_1F_1F_2} = \frac{1}{2}|F_1F_2||y_2| - \frac{1}{2}|F_1F_2||y_1|$$

$$= \frac{3y_0}{5-2x_0} - \frac{3y_0}{5+2x_0} = \frac{12x_0y_0}{25-4x_0^2},$$

$$\text{令 } x_0 = 2\cos\theta, y_0 = \sqrt{3}\sin\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$S_2 - S_1 = \frac{12x_0y_0}{25-4x_0^2} = \frac{24\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}{25-16\cos^2\theta}$$

$$= \frac{24\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}{25\sin^2\theta+9\cos^2\theta} \leq \frac{24\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}{2\cdot 5\sin\theta\cdot 3\cos\theta} = \frac{4\sqrt{3}}{5},$$

$$\text{当且仅当 } 25\sin^2\theta = 9\cos^2\theta, \text{ 即 } \sin\theta = \frac{3\sqrt{34}}{34}, \cos\theta = \frac{5\sqrt{34}}{34} \text{ 时取等号.}$$

$$\therefore S_2 - S_1 \text{ 的最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线