2023 年 3 月广西高三模拟考试
数学参考答案(理科)

1. A 【解析】本题考查集合的并集,考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|x<\frac{1}{4}\}$,$B=\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{4}{3}\}$,所以 $A\cup B=\{x|x<\frac{4}{3}\}$.

2. D 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

依题意可得 $z=-\mathrm{i}$,则 $\frac{z}{z+1}=\frac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}+1}=\frac{-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

3. C 【解析】本题考查三角函数的最值与周期性,考查数学运算的核心素养.

因为函数 $f(x)=a\sin x+1$ 的最大值为 4,所以 $a=\pm 3$,所以函数 $g(x)=\cos(ax+1)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{3}$.

4. A 【解析】本题考查双曲线的定义与性质,考查逻辑推理的核心素养.

依题意可得 $2\sqrt{a+2a}>6$,则 $a>3$,则 $d=2\sqrt{a}>2\sqrt{3}$.

5. A 【解析】本题考查排列组合与古典概型,考查应用意识.

这 2 头故障 LED 灯相邻的概率为 $\frac{4\times 5\times 2}{C_{25}^{2}}=\frac{2}{15}$.

6. C 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

若 $F(x)=f(g(x))h(x)$,则 $F(-x)=f(g(-x))h(-x)=f(-g(x))h(x)=f(g(x))h(x)$,

则 $y=f(g(x))h(x)$ 是偶函数.

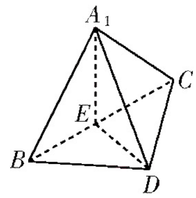
若 $F(x)=f(g(x))+h(x)$,则 $F(-x)=f(g(-x))+h(-x)=f(-g(x))+h(x)=f(g(x))+h(x)$,则 $y=f(g(x))+h(x)$ 是偶函数.

若 $F(x)=f(h(x))g(x)$,则 $F(-x)=f(h(-x))g(-x)=-f(h(x))g(x)$,则 $y=f(h(x))g(x)$ 是奇函数.

若 $F(x)=f(x)|g(x)|h(x)$,则 $F(-x)=f(-x)|g(-x)|h(-x)=f(x)|-g(x)|h(x)=f(x)|g(x)|\cdot h(x)$,则 $y=f(x)|g(x)|h(x)$ 是偶函数.

7. B 【解析】本题考查立体几何中的翻折问题与充分必要条件的判定,考查空间想象能力与推理论证能力.

在菱形 $ABCD$ 中,$AD=2\sqrt{3}$. 取 BC 的中点 E,连接 DE,A_1E. 因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 都是正三角形,所以 $A_1E\perp BC$,$DE\perp BC$,所以二面角 A_1-BC-D 的平面角为 $\angle A_1ED$.



由余弦定理得 $\cos\angle A_1ED=\frac{A_1E^2+DE^2-A_1D^2}{2A_1E\cdot DE}=\frac{6-A_1D^2}{6}=1-\frac{A_1D^2}{6}$.

若 $\sqrt{6}<A_1D<2\sqrt{3}$,则 $\cos\angle A_1ED<0$. 在三棱锥 A_1-BCD 中,$\angle A_1ED$ 为钝角,即二面角 A_1-BC-D 为钝角,反之也成立. 故"$\sqrt{6}<A_1D<2\sqrt{3}$"是"二面角 A_1-BC-D 为钝角"的充要条件.

8. B 【解析】本题考查平面向量的共线问题与等比数列,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

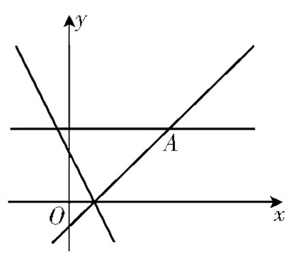
因为 A,B,C 是同一条直线上三个不同的点,且 $\overrightarrow{OA}=a_2\overrightarrow{OB}+a_3\overrightarrow{OC}$,所以 $a_2+a_3=1$.

因为数列 $\{a_n\}$ 为正项等比数列,所以公比 $q>0$.

因为 $\frac{a_4}{q^2}+\frac{a_4}{q}=1$,所以 $a_4=\frac{q^2}{1+q}>2$,又 $q>0$,所以 $q>1+\sqrt{3}$.

9. C 【解析】本题考查简单的线性规划问题,考查数形结合的数学思想.

作出可行域,如图所示,当直线经过点 $A(4,3)$ 时,z 取得最大值,且最大值为 -2,故 $z=x-2y$ 的取值范围是 $(-\infty,-2]$.



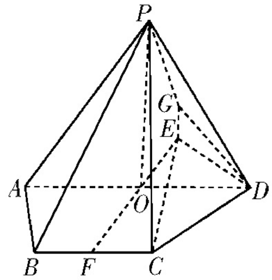
10. A 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算的核心素养.

因为 $\frac{\cos 2\alpha-\sin\alpha}{1-2\sin\alpha}=\frac{1-2\sin^2\alpha-\sin\alpha}{1-2\sin\alpha}=\frac{(1-2\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{1-2\sin\alpha}=\frac{8}{5}$,

所以 $1+\sin\alpha=\frac{8}{5}$，即 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. 因为 α 为钝角，所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，

故 $\tan(\alpha+\frac{3\pi}{4})=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1-\frac{3}{4}}=-7$.

11. D 【解析】本题考查四棱锥的外接球，考查空间想象能力与运算求解能力.



依题意可得 $AD/\!/BC$，且梯形 $ABCD$ 的高为 1. 如图，设 BC，AD 的中点分别为 F，O，连接 FO，则 $OF\perp AD$，延长 FO 至 E，使得 $CE=DE$，连接 OE，则 $(EO+1)^2+1^2=2^2+EO^2$，解得 $EO=1$，

所以四边形 $ABCD$ 外接圆的半径为 $\sqrt{5}$. 设 G 为四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心，则 $EG\perp$ 底面 $ABCD$，设 $EG=x$，由 $GD=GP$，得 $x^2+(\sqrt{5})^2=1^2+(4-x)^2$，解得 $x=\frac{3}{2}$，

则四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi\cdot GD^2=4\pi\cdot[(\sqrt{5})^2+(\frac{3}{2})^2]=29\pi$.

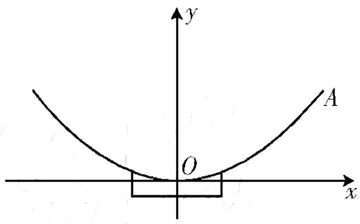
12. C 【解析】本题考查指数、对数的运算以及函数与函数之间的变换，考查数学抽象的核心素养.

若 $x\in(0,+\infty)$，则 $ex\in(0,+\infty)$，所以函数 $f(ex)=(ex)^2e^{ex}-\ln(ex)=x^2e^{ex+2}-(1+\ln x)$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等，因为 $g(x)=f(ex)+1$，所以 $g(x)$ 的最小值为 $m+1$.

13. 2.5 【解析】本题考查随机变量的数学期望，考查数据处理能力.

$E(X)=-1\times0.2+2\times0.35+4\times0.25+5\times0.2=2.5$.

14. $\frac{27}{8}$ 【解析】本题考查抛物线的性质，考查应用意识与数学建模的核心素养.



如图，以抛物线的顶点为坐标原点，对称轴为 y 轴，建立直角坐标系，依题意可得 A 的坐标为 $(\frac{9}{2},3)$. 设抛物线的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$，则 $\frac{81}{4}=6p$，解得 $p=\frac{27}{8}$. 故该抛物线的焦点到准线的距离为 $\frac{27}{8}$ cm.

15. $(-1,+\infty)$ 【解析】本题考查导数的应用与不等式恒成立问题，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

由 $ax^2>x^3-x-1$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立，得 $a>x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立.

设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}(x<0)$，则 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^3+x+2}{x^3}$.

设函数 $g(x)=x^3+x+2(x<0)$，则 $g(x)$ 为增函数.

因为 $g(-1)=0$，所以当 $-1<x<0$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)<0$，当 $x<-1$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)_{\max}=f(-1)=-1$，故 $a>-1$.

16. 200 【解析】本题考查数列的综合，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

当 $3\leqslant n\leqslant k$ 时，$a_na_{n-1}=a_{n-1}a_{n-2}-(n-1)$，

当项数 k 最大时，$a_k=0$，则 $k-1=a_{k-1}a_{k-2}$，

$a_{k-1}a_{k-2}=a_{k-2}a_{k-3}-(k-2)$，$a_{k-2}a_{k-3}=a_{k-3}a_{k-4}-(k-3)$，…，$a_3a_2=a_2a_1-2$，

将以上各式相加得 $k-1=a_1a_2-[(k-2)+(k-3)+\cdots+2]$，

即 $k-1=a_1a_2-\frac{(k-2+2)(k-3)}{2}$，

$\frac{k^2-k-2}{2}=27\times737$，即 $(k-2)(k+1)=198\times201$，则 $k=200$.

17.【分析】本题考查正弦定理与余弦定理的应用，第(2)问以开放式的题型考查运算求解能力与推理论证能力.

(1)证明：因为 $\frac{b^2+c^2-a^2}{\sin B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{\sin A}$，所以由正弦定理得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a}$， …………………… 2分

则 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， ……………………………………………………………………

即 $\cos A=\cos B$. ………………………………………………………………………… 5 分

因为 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，所以 $A=B$. ……………………………………………… 6 分

(2)解：选①③作为条件证明②

由(1)知，$a=b$，则 $AC=BC$. ………………………………………………………………… 7 分

因为 $CD=2$，所以 $AC=BC=4$， ……………………………………………………………… 8 分

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\dfrac{16+4-16}{16}=\dfrac{1}{4}$，

故②成立. ……………………………………………………………………………………… 12 分

选①②作为条件证明③

由(1)知，$a=b$，则 $AC=BC$. ………………………………………………………………… 7 分

设 $CD=x$，则 $AC=BC=2x$， ………………………………………………………………… 8 分

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{4x^2+x^2-16}{4x^2}=\dfrac{1}{4}$， ……………………………………………… 10 分

解得 $x=2$，故③成立. ……………………………………………………………………… 12 分

选②③作为条件证明①

由(1)知，$a=b$，则 $AC=BC$. ………………………………………………………………… 7 分

因为 $CD=2$，所以 $AC=BC=4$， ……………………………………………………………… 8 分

由余弦定理得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos C=16$， …………………………………… 10 分

则 $AD=4$，故①成立. ………………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问还可以这样证明：因为 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\sin B}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{\sin A}$，所以 $\dfrac{2bc\cos A}{\sin B}=\dfrac{2ac\cos B}{\sin A}$， ………………… 2 分

即 $\dfrac{b\cos A}{\sin B}=\dfrac{a\cos B}{\sin A}$，则 $\dfrac{\sin B\cos A}{\sin B}=\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A}$， ……………………………………………… 4 分

即 $\cos A=\cos B$. ………………………………………………………………………… 5 分

因为 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，所以 $A=B$. ……………………………………………… 6 分

【2】第(2)问若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

18.**【分析】本题考查统计中的增长百分数与回归分析，考查数据处理能力与推理论证能力.**

解：(1)因为广西 2020 年农村居民人均可支配收入为 14815 元，广西 2019 年农村居民人均可支配收入为 13676 元，所以广西 2020 年农村居民人均可支配收入的年增长率为 $\dfrac{14815-13676}{13676}\times100\%=\dfrac{1139}{13676}\times100\%$ $\approx8.3\%$. ……………………………………………………………………………………… 4 分

(2) $\bar{x}=\dfrac{10359+11325+12435+13676+14815}{5}=\dfrac{62610}{5}=12522$. ……………………………… 5 分

因为 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.71x+m$，所以 $\hat{b}=1.71$， ………………………………… 6 分

所以 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\hat{b}\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=1.71\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-12522)^2\approx21732390$， …………………… 7 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\approx\dfrac{21732390}{1.71}=12709000$， ………………………………………………… 8 分

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}\approx\dfrac{21732390}{3560\times6140}>\dfrac{21732390}{3600\times6200}\approx0.97$， …………………… 10 分

所以 $r>0.95$， ……………………………………………………………………………… 11 分

故 y 与 x 之间存在较好的线性关系. ………………………………………………………… 12 分

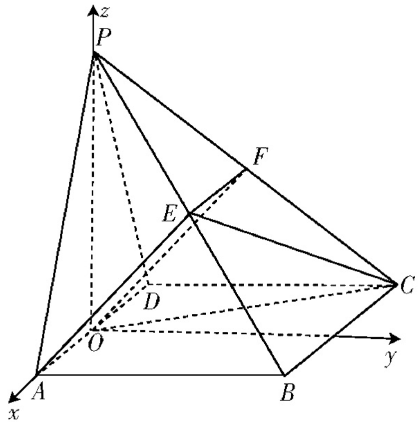
评分细则：

【1】第(1)问写为 $\dfrac{14815-13676}{13676}=\dfrac{1139}{13676}\approx8.3\%$，不扣分.

【2】第(2)问，若逐个计算得到 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\approx21732390$，不扣分.

19.【分析】本题考查面面平行问题与利用空间向量求线面角的问题，考查空间想象能力与运算求解能力.

解：(1)设平面 AOE 与直线 PC 相交于点 F，连接 EF，OF.



因为 $AE//$平面 POC，$AE\subset$平面 $AEFO$，平面 $AEFO\cap$平面 $POC=FO$，所以 $AE//FO$. ………………………………………………………… 2 分

因为 $AO//BC$，$BC\subset$平面 PBC，$AO\not\subset$平面 PBC，所以 $AO//$平面 PBC.

………………………………………………………………………… 4 分

又平面 $AEFO\cap$平面 $PBC=EF$，所以 $AO//EF$，所以四边形 $AEFO$ 为平行四边形，

所以 $EF=AO=\frac{1}{2}BC$，所以 E，F 分别为 PB，PC 的中点，故 $\frac{PE}{PB}=\frac{1}{2}$. …

………………………………………………………………………… 6 分

(2)以点 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，则 $O(0,0,0)$，$C(-1,3,0)$，$P(0,0,3)$，

$E(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{OC}=(-1,3,0)$，$\overrightarrow{OP}=(0,0,3)$，$\overrightarrow{CE}=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$. ………………………………… 8 分

设平面 POC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-x+3y=0,\\3z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\boldsymbol{m}=(3,1,0)$. …………………… 10 分

设直线 CE 与平面 POC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{CE}|}=\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$. …………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问需用线面平行的性质定理，若考生直接写明 E 为 PB 的中点，再证明 $AE//$平面 POC，本小问只得 1 分.

【2】第(2)问中，平面 POC 的法向量不唯一，只要与 $\boldsymbol{m}=(3,1,0)$共线即可.

20.【分析】本题考查导数的几何意义与导数的应用，考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养.

解：(1)因为 $a=0$，所以 $f(x)=-2x-x\ln x$，$f'(x)=-3-\ln x$. ………………………………………… 1 分

①由 $f'(1)=-3$ 及 $f(1)=-2$， ……………………………………………………………………… 2 分

得曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-(-2)=-3(x-1)$，即 $y=-3x+1$. ……………… 3 分

②令 $f'(x)>0$，得 $0<x<e^{-3}$；令 $f'(x)<0$，得 $x>e^{-3}$. ……………………………………………… 4 分

所以 $f(x)$在$(0,e^{-3})$上单调递增，在$(e^{-3},+\infty)$上单调递减， ………………………………… 5 分

所以 $f(x)$在 $x=e^{-3}$处取得极大值，且极大值为 $f(e^{-3})=e^{-3}$，$f(x)$没有极小值. ………………… 6 分

(2)由 $f(x)=0$，得 $ax-\ln x+a-2=0$， ……………………………………………………………… 7 分

则$\frac{\ln x+2}{x+1}=a$. 设函数 $h(x)=\frac{\ln x+2}{x+1}$，则 $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{(x+1)^2}$. ……………………………………… 8 分

因为函数 $\varphi(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$ 在$(0,e)$上单调递减，且 $\varphi(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)>0$，当 $1<x<e$ 时，$\varphi(x)<0$. ……………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,e)$上单调递减，

则 $h(x)_{\max}=h(1)=1$. ……………………………………………………………………………… 10 分

由 $h(\frac{1}{e^2})=0$，$h(e)=\frac{3}{e+1}$， ………………………………………………………………………… 11 分

得$\frac{3}{e+1}<a<1$，故 a 的取值范围是$(\frac{3}{e+1},1)$. ………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问的切线方程还可以写为 $3x+y-1=0$.

【2】第(2)问还可以这样解答：

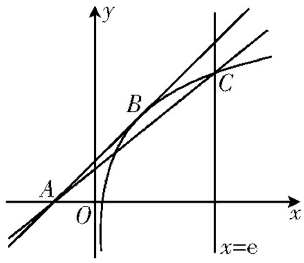
由 $f(x)=0$，得 $ax-\ln x+a-2=0$， ………………………………………………………………

则 $a(x+1)=\ln x+2$. 设函数 $h(x)=\ln x+2$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}$. …………………………………………………… 8 分

设直线 $y=a(x+1)$ 与曲线 $y=h(x)$ 切于点 $B(x_0,\ln x_0+2)$，则 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_0}=a,\\ a(x_0+1)=\ln x_0+2,\end{cases}$ ……………… 9 分

整理得 $a+\ln a=1$. 因为函数 $\varphi(x)=x+\ln x$ 为增函数，且 $\varphi(1)=1$，

所以 $a=1$. …………………………………………………………………………… 10 分



直线 $y=a(x+1)$ 过定点 $A(-1,0)$，当该直线经过点 $C(\mathrm{e},3)$ 时，$a=\dfrac{3}{\mathrm{e}+1}$. ………

………………………………………………………………………………………… 11 分

数形结合可知，当且仅当 $\dfrac{3}{\mathrm{e}+1}<a<1$ 时，直线 $y=a(x+1)$ 与函数 $h(x)=\ln x+2(0<x<\mathrm{e})$ 的图象恰有两个交点，即 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上恰有两个零点，故 a 的取值范围是 $(\dfrac{3}{\mathrm{e}+1},1)$. ……… 12 分

21.**【分析】本题考查直线与椭圆的综合，考查数学抽象、数学运算的核心素养.**

解：(1)设直线 AB 的方程为 $y=2x+t$，因为 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\dfrac{|t|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $t=\pm1$. …………………………………………………………………… 1 分

将 $y=2x\pm1$ 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $9x^2\pm8x=0$， ………………………………………………… 2 分

解得 $x_1=0,x_2=\pm\dfrac{8}{9}$， ……………………………………………………………………………… 3 分

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{8\sqrt{5}}{9}$. …………………………………………………………… 4 分

故△AOB 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{5}}{9}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4}{9}$. ………………………………………………… 5 分

(2)设 $B(x_1,y_1)$，直线 AB 的方程为 $y=2(x-x_1)+y_1$，代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $9x^2+8(y_1-2x_1)x+2(y_1-2x_1)^2-2=0$， ……………………………………………………………………………… 6 分

则 $x_A=-\dfrac{8(y_1-2x_1)}{9}-x_1$，$y_A=2(x_A-x_1)+y_1$，可得点 A 的坐标为 $(\dfrac{7x_1-8y_1}{9},\dfrac{-4x_1-7y_1}{9})$. ……… 7 分

设 $C(x_2,y_2)$，直线 CD 的方程为 $y=-2(x-x_2)+y_2$，代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $9x^2-8(y_2+2x_2)x+2(y_2+2x_2)^2-2=0$， ……………………………………………………………………………… 8 分

则 $x_D=\dfrac{8(y_2+2x_2)}{9}-x_2$，$y_D=-2(x_D-x_2)+y_2$，可得点 D 的坐标为 $(\dfrac{7x_2+8y_2}{9},\dfrac{4x_2-7y_2}{9})$. ……… 9 分

由 $k_{BC}=-\dfrac{1}{2}$，得 $y_1-y_2=-\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)$.

因为 $\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=\dfrac{x_2^2}{2}+y_2^2$，所以 $y_1^2-y_2^2=-\dfrac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)$，则 $y_1+y_2=x_1+x_2$， ……………… 10 分

$$\text{则 } k_{AD}=\frac{\dfrac{4x_2-7y_2}{9}-\dfrac{-4x_1-7y_1}{9}}{\dfrac{7x_2+8y_2}{9}-\dfrac{7x_1-8y_1}{9}}=\frac{4(x_1+x_2)+7(y_1-y_2)}{-7(x_1-x_2)+8(y_1+y_2)}=\frac{4(x_1+x_2)-\dfrac{7}{2}(x_1-x_2)}{-7(x_1-x_2)+8(x_1+x_2)}=\frac{1}{2}.$$

故直线 AD 的斜率为定值. …………………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问求出 $t=\pm1$ 后，还可以结合直线与椭圆的对称性设直线 l：$y=2x+1$，代入 $\dfrac{x^2}{2}+y$

$8x=0$， ………………………………………………………………………………………………

解得 $x_1=0, x_2=-\frac{8}{9}$， …………………………………………………………………… 3 分

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{8\sqrt{5}}{9}$. …………………………………………………………… 4 分

故$\triangle AOB$的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{5}}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{9}$. ……………………………………………… 5 分

【2】第(2)问如果用其他方法解答，请根据步骤给分.

22.**【分析】本题考查参数方程与极坐标，考查数学建模、数学运算的核心素养.**

解：(1)在曲线 C 的参数方程中消去参数 t，可得曲线 C 的普通方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=5$，………… 2 分

则 $x^2+y^2-4x-4y+3=0$， …………………………………………………………………… 3 分

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入得 $\rho^2-4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+3=0$，

此即为 C 的极坐标方程. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)由 $\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta-1=0$，得 $x-3y-1=0$， …………………………………………… 5 分

联立$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=5,\\x-3y-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$

不妨设点 A 的直角坐标为$(1,0)$，则点 B 的直角坐标为$(4,1)$. ………………………………… 7 分

因为直线 l_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}$，所以直线 l_2 的直角坐标方程为 $y=x$.

设点 P 的直角坐标为(x,x)，…………………………………………………………………… 8 分

由$\overrightarrow{PA}=(1-x,-x)$，$\overrightarrow{PB}=(4-x,1-x)$，得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-x)(4-x)-x(1-x)=2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}$， ……

…………………………………………………………………………………………………… 9 分

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取得最小值$-\frac{1}{2}$. ………………………………………………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问严格按照步骤给分.

【2】第(2)问中，考生如果得到$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2x^2-6x+4$后，未配方，而写为“当 $x=-\frac{-6}{2\times2}=\frac{3}{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取得最小值$-\frac{1}{2}$”，不扣分.

23.**【分析】本题考查不等式选讲中不等式的证明与基本不等式的应用，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.**

(1)证明：由 $a^2+b^2+2c^2=4$，得 $a^2+b^2=4-2c^2$， ……………………………………………… 1 分

由 $a+b+c=3$，得 $a+b=3-c$，…………………………………………………………………… 2 分

由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，得 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$(当且仅当 $a=b$ 时，等号成立)，……………………… 3 分

则 $4-2c^2\geqslant\frac{1}{2}(3-c)^2$，解得$\frac{1}{5}\leqslant c\leqslant 1$. …………………………………………………… 5 分

(2)解：当 $a=b$ 时，$2b^2+2c^2=4$，即 $b^2+c^2=2$. ……………………………………………… 6 分

由 $b^4+c^4\geqslant\frac{1}{2}(b^2+c^2)^2$(当且仅当 $b=c$ 时，等号成立)，

得 $t=\frac{b^4+c^4}{bc}\geqslant\frac{(b^2+c^2)^2}{2bc}=\frac{2(b^2+c^2)}{2bc}\geqslant\frac{4bc}{2bc}=2$(当且仅当 $b=c=1$ 时，等号成立). ………… 8 分

因为函数 $f(t)=t+\frac{1}{t}(t\geqslant 2)$为增函数，所以 $f(t)_{\min}=f(2)=\frac{5}{2}$，……………………………… 9 分

因为$\frac{b^4+c^4}{bc}+\frac{bc}{b^4+c^4}=t+\frac{1}{t}(t\geqslant 2)$，所以$\frac{b^4+c^4}{bc}+\frac{bc}{b^4+c^4}$的最小值为$\frac{5}{2}$. ………………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问未写“当且仅当 $a=b$ 时，等号成立”，扣 1 分.

【2】第(2)问用其他方法作答，按照步骤给分.