

武汉市常青联合体 2022-2023 学年度第二学期期末考试

高一数学试卷

命题学校：武汉市关山中学

命题教师：胡丹

审题教师：黄希

考试时间：2023 年 6 月 29 日

试卷满分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x|x > 1\}$ ，集合 $B = \left\{x \middle| x > \frac{1}{3}\right\}$ ，则 $(C_R A) \cap B = (\quad)$

A. $\{x|x \leq 1\}$

B. $\left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x < 1\right\}$

C. $\left\{x \middle| \frac{1}{3} < x \leq 1\right\}$

D. $\left\{x \middle| x > \frac{1}{3}\right\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 2-i$ ，则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于 $(\quad)$

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 若 $x > 3$ ，则函数 $f(x) = x + \frac{2}{x-3}$ 的最小值为 $(\quad)$

A. $2\sqrt{2}$

B. $-2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2} + 3$

D. $-2\sqrt{2} + 3$

4. 某市卫健委为了解本市参加过防疫的 7.5 万名志愿者服务时长（单位：小时），做了一次随机抽样调查。将样本中个体的服务时长进行统计整理，得到如图所示的频率分布直方图。据此估计本次参加过防疫的志愿者中服务时长

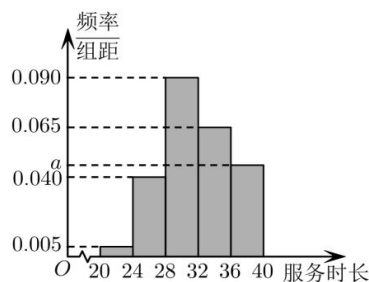
超过 32 小时的，约有 $(\quad)$

A. 3.45 万人

B. 3.48 万人

C. 3.82 万人

D. 3.91 万人



5. 下列命题正确的是 $(\quad)$

A. 对于任意非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，若向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{c}$ 上的投影向量相等，则 $\vec{a} = \vec{b}$ ；

B. 若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ 一定成立；

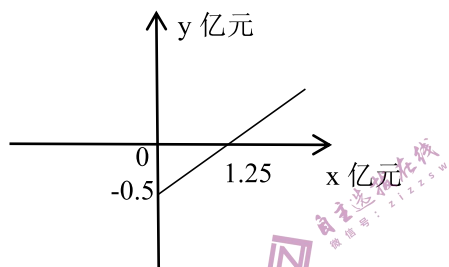
C. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则 A、B、C、D 四点一定共线；

D. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 所在直线的夹角是 30° 。

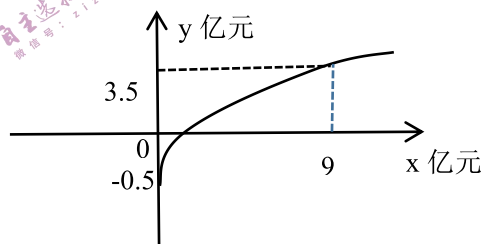
6. 已知 $|\overrightarrow{OA}|=1$, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\sqrt{3}$, 点C在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC=30^\circ$, 设 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ($x, y \in \mathbb{R}$), 则 $\frac{x}{y} =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

7. 2023年4月18日, 我国自行研制具有完全自主知识产权的喷气式支线客机ARJ21完成了在印尼首航, 这是ARJ21在海外市场商业运行的首秀, 标志着国产新支线客机ARJ21在海外商业运营迈开第一步。中国商飞公司为了进一步打开海外市场, 需要加大在开创性、创新性探索和实践方面的投入。中国商飞公司旗下甲乙两家子公司, 各子公司投入与利润的关系如下. 甲公司: 利润 y (亿元)与投入 x (亿元)成一次函数关系 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 乙公司: 利润 y (亿元)与投入 x (亿元)成幂函数型关系 $y = m\sqrt{x} + n$ ($m \neq 0$), 如图所示。目前, 中国商飞总公司准备拿出资金10亿元投入到甲、乙两公司, 如何分配才能使总利润最大呢? ()



甲公司

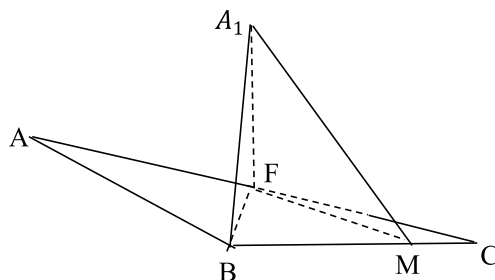


乙公司

- A. 投入甲公司 $\frac{25}{9}$ 亿元, 投入乙公司 $\frac{65}{9}$ 亿元
B. 投入甲公司 $\frac{65}{9}$ 亿元, 投入乙公司 $\frac{25}{9}$ 亿元
C. 投入甲公司0亿元, 投入乙公司10亿元
D. 投入甲公司10亿元, 投入乙公司0亿元

8. 等腰三角形 ABC 中, $AB=BC=4$, $\angle ABC=120^\circ$. F 为 AC 中点, M 为线段 BC 上靠近点 C 的四等分点, 将 $\triangle ABF$ 沿 BF 翻折, 使 A 到 A_1 的位置, 且平面 $A_1BF \perp$ 平面 BCF , 则四面体 A_1BFM 的外接球的表面积为 ()

- A. $\frac{16\pi}{3}$ B. $\frac{16\pi}{9}$
C. $\frac{64\pi}{9}$ D. $\frac{64\pi}{3}$



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设 z_1, z_2 为复数，且 $z_1 \neq z_2$ ，下列命题正确的是 ()

- A. 若 $|z_1 - 2| = 1$ ，则 z_1 在复平面上所对应的点的轨迹为圆
- B. 若 z_1, z_2 对应的点 Z_1, Z_2 关于 y 轴对称，则 $z_1 = \overline{z_2}$
- C. 若 $\frac{z_1}{z_2} = i$ ，则 z_1 的虚部与 z_2 的实部相等
- D. 若 $|z_1| = |z_2|$ ，则 $z_1^2 = z_2^2$

10. 下列说法中正确的是 ()

A. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (1, 1)$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 的夹角为锐角，则实数 λ 的取值范围是

$$(-\frac{5}{3}, 0) \cup (0, +\infty)$$

B. 已知点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ ，则 P 是 $\triangle ABC$ 的重心

C. 已知点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$ ，则点 P 的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的内心

D. 若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线，且 $\vec{a} = (0, 3)$ ，满足 $2|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 为 5 或 1

11. 对于函数 $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3})$ 的性质，正确的有 ()

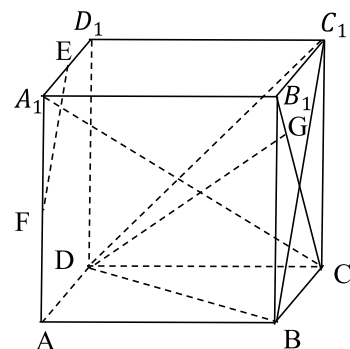
A. 定义域为 $\{x | x \neq 2k + \frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$ ，周期为 2

B. 单调区间为 $(\frac{1}{3} + 2k, \frac{7}{3} + 2k)$ ， $k \in \mathbb{Z}$

C. 对称中心为 $(2k - \frac{2}{3}, 0)$ ， $k \in \mathbb{Z}$

D. 在定义域内，任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ， $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2})$ ，则 $|a - b|$ 最大值为 1

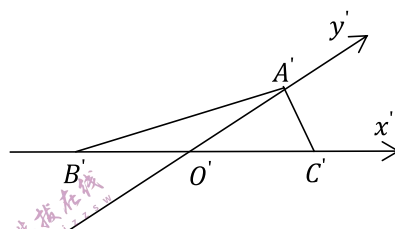
12. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 A_1D_1, AA_1 的中点，G 为线段 B_1C 上一个动点，则 ()



- A. $A_1C \perp$ 平面 BC_1D
- B. 若 G 为 B_1C 的中点，则异面直线 EF 与 DG 所成的角为 90°
- C. 直线 A_1G 与平面 BDC_1 所成角的余弦值的范围为 $[0, \frac{\sqrt{6}}{3}]$
- D. 若点 M 为正方形 A_1ADD_1 内（包括边界上）的动点，且 $CM \parallel$ 平面 $BGEF$ ，则点 M 的轨迹的长度为 $\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 用斜二测画法画出的某圆锥轴截面所在三角形的直观图如下图，其中 $O'B' = O'C' = 2$ ， $O'A' = \sqrt{3}$ ，则这个圆锥的侧面积为_____.



14. 下列说法正确的是_____.

- ① 命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > -1$ ” 的否定是 “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < -1$ ”；
- ② 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x)$ 的单调减区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ；
- ③ 若 $x > 0$ ，“ $x > |y|$ ” 是 “ $x > y$ ” 的必要而不充分条件；
- ④ 使 “ $x^2 - x - 6 < 0$ ” 成立的一个充分不必要条件是 “ $-1 < x < 3$ ”.

15. 已知一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均值为 $\bar{x} = 5$ ， $s^2 = 32$ ，删去一个数之后，平均值没有改变，方差比原来大 4，则这组数据的个数 $n =$ _____.

16. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上函数 $f(x), g(x)$ 满足： $f(x+1) - g(2-x) = 2$ ， $f(x-2) = g(x-3) + a$ ，且 $f(x+1)$ 为奇函数，则 $a =$ _____， $f(x)$ 最小正周期 $T =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题 10 分)

已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 60° ，且 $\vec{a} = (2, 0)$.

(1) 若 $|\vec{b}| = 2$ ，求 $\vec{b}$ 的坐标；

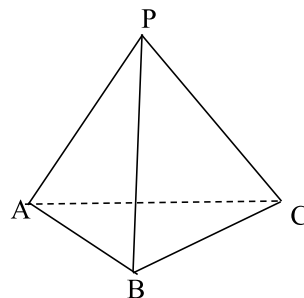
(2) 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ ， $\lambda \in \mathbb{R}$ ，求 $|\vec{a} + \lambda \vec{b}|$ 的最小值.

18. (本小题 12 分)

如图所示，在三棱锥 $P - ABC$ 中， $PA = PB = PC = AB = AC = \sqrt{3}$
 $BC = 2$.

(1) 求二面角 $P - BC - A$ 的余弦值；

(2) 求三棱锥 $P - ABC$ 的体积.



18 题

19. (本小题 12 分)

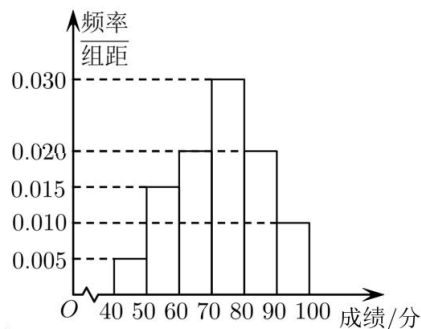
2023 年为普及航天知识，某校开展了“航天知识竞赛”活动，现从参加该竞赛的学生中随机抽取了 80 名，统计他们的成绩（满分 100 分），其中成绩不低于 80 分的学生被评为“航天达人”，将数据整理后绘制成如图所示的频率分布直方图.

(1) 若该中学参加这次竞赛的共有 3000 名学生，试估计全校这次竞赛中“航天达人”的人数；

(2) 估计参加这次竞赛的学生成绩的第 75 百分位数；

(3) 若在抽取的 80 名学生中，利用分层随机抽样的方法

从成绩不低于 70 分的学生中随机抽取 6 人，则从成绩在 $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$ 内的学生中分别抽取了多少人？



20. (本小题 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

(1) 已知 $a + c = 6$, $\vec{e}_1 = (a, \cos A)$, $\vec{e}_2 = (\cos B, b)$, $3b = a + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$, 求 $\triangle ABC$ 的周长;

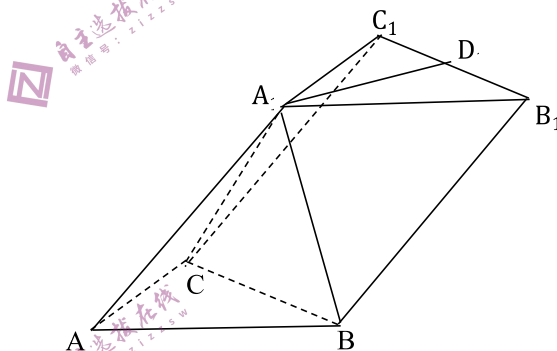
(2) $B = 30^\circ$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$. 求 a .

21. (本小题 12 分)

如图所示, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 为边长为2的正三角形, $AA_1 = 3$, A_1 在底面上的射影为 BC 中点, D_1 为 B_1C_1 的中点.

(1) 求证: $A_1D_1 \perp$ 平面 A_1BC ;

(2) 求直线 A_1B 与 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



21 题

22. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{4^x + 3}{2^x + 1}$, 函数 $g(x) = |x - a| + x^2 - 1$.

(1) 若 $x \in [2, +\infty)$, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若对 $\forall x_1 \in [-1, 1]$, 都存在 $x_2 \in [2, +\infty)$, 使得 $f(x_2) = g(x_1)$, 求 a 的取值范围.