开封市 2023 届高三年级第三次模拟考试
理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $z(2+\mathrm{i})=1$,则复数 z 的虚部为

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{1}{5}\mathrm{i}$　　D. $\frac{1}{5}\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid x=\sin\frac{n\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x\mid x=ab,a,b\in A\}$,则集合 B 的真子集个数是

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 8

3. 设 α 是第二象限角,$P(x,1)$为其终边上一点,且 $\cos\alpha=\frac{1}{3}x$,则 $\tan\alpha=$

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

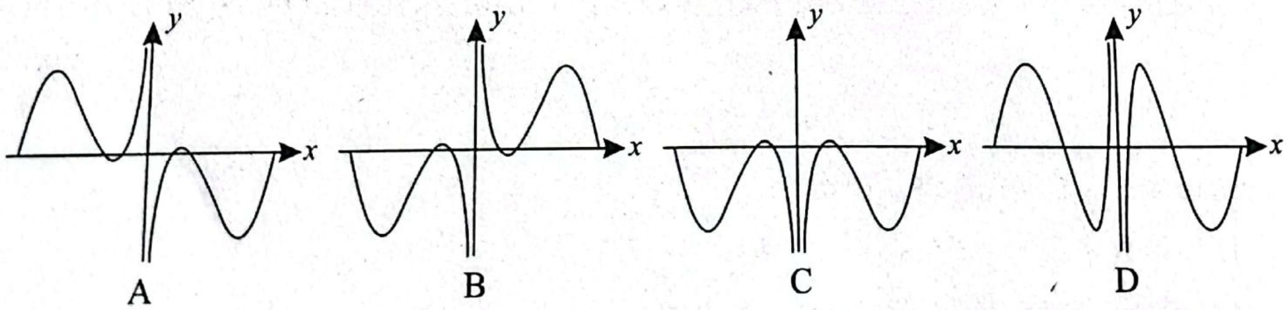
4. 记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知 $2(a_1+a_2)=a_2+a_3=12$,则 $S_5=$

A. 30　　B. 31　　C. 61　　D. 62

5. 已知双曲线 $x^2-my^2=1(m>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,直线 l 经过 F_2 且与双曲线右支相交于 A,B 两点,若$|AB|=2$,则三角形 ABF_1 的周长为

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 不能确定

6. 函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\cos x$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的图象大致为



7. 将 5 名学生分配到 3 个社区当志愿者,每个社区至少分配 1 名学生,则不同的分配方法种数是

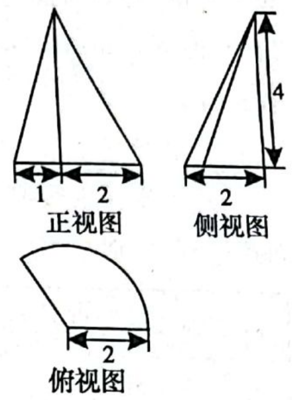
A. 24　　B. 50　　C. 72　　D. 150

8. 已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1,a\neq b$，则下列不等式成立的是

A. $\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{2}<\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}$　　B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}<\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}<\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}<\sqrt{2}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$　　D. $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{2}$

9. 某几何体的三视图如图所示，其中俯视图为扇形，则该几何体的体积为



A. $\frac{2\pi}{9}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{16\pi}{3}$　　D. $\frac{16\pi}{9}$

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 为奇函数，$f(x+1)$ 为偶函数，且 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=1$，则 $f(\ln e)=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为棱 A_1D_1 的中点，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球表面积为

A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$　　B. 3π　　C. $\frac{41\pi}{16}$　　D. $\frac{41\pi}{64}$

12. 等腰直角三角形 ABC 的直角顶点 A 在 x 轴的正半轴上，点 B 在 y 轴的正半轴上，点 C 在第一象限，且 $|AB|=1$，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　C. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},1\right]$　　D. $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，写出一个与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的向量的坐标________.

14. 两条直线 $y=kx$ 和 $y=-kx$ 分别与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 相交于不同于原点的 A,B 两点，若直线 AB 经过抛物线的焦点，则 $|k|=$________.

15. 已知点 P 在圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ 上，点 $A(1,0),B(0,1)$，当 $\angle PBA$ 最小时，$\tan\angle PBA=$________.

16. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2-a_{n-1}^2=p$，$(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$，$p$ 为常数)，则称 $\{a_n\}$ 为"等方差数列". 记 S_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $\{S_n\}$ 为"等方差数列"，且 $S_2+S_4=2+\sqrt{2}$，$a_3+a_4=2-\sqrt{2}$，则 a_n+S_n 的最小值是________.

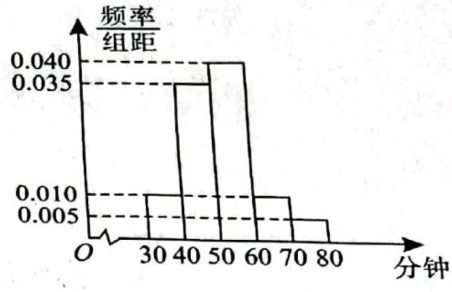
三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)

某校为了解学生每天的校内体育锻炼情况，随机选取了100名学生进行调查，其中男生有50人.下面是根据调查结果绘制的学生日均校内体育锻炼时间（单位：分钟）的频率分布直方图.将日均校内体育锻炼时间在[60,80]内的学生评价为“锻炼时间达标”，已知样本中“锻炼时间达标”的学生中有5名女生.



(1)若该校共有1000名学生，请估计该校“锻炼时间达标”的学生人数；

(2)根据样本数据完成下面的2×2列联表，并据此判断是否有90%的把握认为“锻炼时间达标”与性别有关？

是否达标 / 性别	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男			
女			
合计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

18.(12 分)

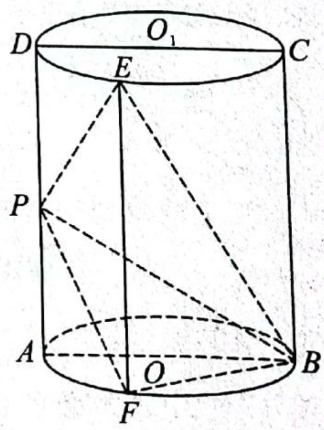
记△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知a,b,c成等差数列，且$7\sin A=3\sin C$.

(1)求$\cos B$；

(2)若△ABC的面积为$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$，求b.

19.(12 分)

如图，四边形$ABCD$是圆柱OO_1的轴截面，EF是圆柱的母线，P是线段AD的中点，已知$AB=4$，$BC=6$.



(1)证明：平面$EPF\perp$平面BEF；

(2)若直线AB与平面EPF所成角为60°，求二面角$F-PE-B$的余弦值.

20.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 为椭圆 C 上一点(除左、右顶点),直线 PF_1,PF_2 与椭圆 C 的另一个交点分别为 A,B,且 $\overrightarrow{PF_1}=m\overrightarrow{F_1A},\overrightarrow{PF_2}=n\overrightarrow{F_2B}$,当 $m=1$ 时,$|PA|=3$.

(1)若椭圆 C 的离心率为$\frac{1}{2}$,求椭圆 C 的标准方程;

(2)若 $m+n=\frac{10}{3}$,求椭圆 C 的标准方程.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+ax(a\in\mathbf{R})$.

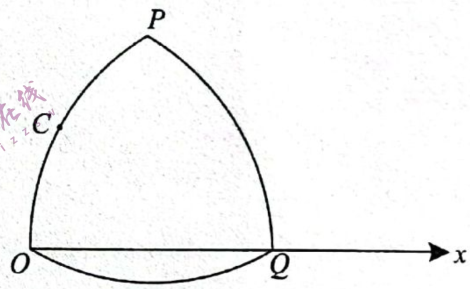
(1)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2)若 $a\geqslant 0$,且存在 $0<m<n$,使得 $f(x)$与 $f(f(x))$的定义域均为$[m,n]$,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分.请考生在 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

以等边三角形的每个顶点为圆心,以其边长为半径,在另两个顶点间作一段圆弧,三段圆弧围成的曲边三角形被称为勒洛三角形.如图,在极坐标系 Ox 中,曲边三角形 OPQ 为勒洛三角形,且 $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$,$Q$ 在极轴上,C 为$\overset{\frown}{OP}$ 的中点.以极点 O 为直角坐标原点,极轴 Ox 为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系 xOy.



(1)求$\overset{\frown}{OQ}$ 所在圆 P 的直角坐标方程与直线 CQ 的极坐标方程;

(2)过 O 引一条射线,分别交圆 P,直线 CQ 于 A,B 两点,证明:$|OA|\cdot|OB|$为定值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|$.

(1)若$|a-b|>c$,解不等式 $f(x)>c$;

(2)若 $b=1$,且不等式 $f(x)<2-|a-2|$的解集非空,求 a 的取值范围.