# 2024届新高三开学联考

## 数学试题

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

**注意事项:**

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

**一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

1.若复数 $z$ 的虚部小于 0,且 $z^2=-1$,则 $z(1-z)=$

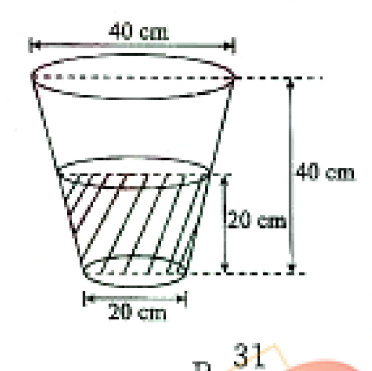
A. $1+i$　　B. $1-i$　　C. $-1+i$　　D. $-1-i$

2.已知集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}\mid y=\ln(1-x^2)\}$,$N=\{-1,0,1\}$,则 $M\cap N=$

A. $\{0\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{-1,1\}$　　D. $\varnothing$

3.最早的测雨器记载见于南宋数学家秦九韶所著的《数书九章》(1247 年).该书第二章为"天时类",收录了有关降水量计算的四个例子,分别是"天池测雨"、"圆罂测雨"、"峻积验雪"和"竹器验雪".如图"竹器验雪"法是下雪时用一个圆台形的器皿收集雪量(平地降雪厚度=器皿中积雪体积除以器皿口面积),已知数据如图(注意:单位 cm),则平地降雪厚度的近似值为




A. $\frac{91}{12}$ cm　　B. $\frac{31}{4}$ cm

C. $\frac{95}{12}$ cm　　D. $\frac{97}{12}$ cm

4.已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,$a_6=2a_3$,则$\frac{S_{17}}{a_3}=$

A. 17　　B. 34　　C. 48　　D. 51

5.已知 $a^{\log_3 a}=3^{\log_3 81}$,则 $a=$

A. 9 或$\frac{1}{3}$　　B. 81 或$\frac{1}{3}$

C. 9 或$\frac{1}{9}$　　D. 81 或$\frac{1}{81}$

6.已知 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)(\varphi\in[0,\pi))$在$\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$上单调递减,且 $f(0)=\frac{1}{2}$,则

A. $\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $\varphi=\frac{\pi}{3}$　　C. $\varphi=\frac{2\pi}{3}$　　D. $\varphi=\frac{5\pi}{6}$



7.已知直线 $x-y+\frac{1}{4}=0$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于 $A,B$ 两点,过线段 $AB$ 的中点 $P$ 作一条垂直于 $x$ 轴的直线 $m$ 与直线 $l:y=-\frac{1}{4}$交于点 $Q$,则$\triangle QAB$ 的面积为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

8.若 $a=0.001+\sin 0.001$,$b=\ln 1.001$,$c=e^{0.001}-1$,则

A. $b>c>a$　　B. $c>a>b$　　C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

**二、多选题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.**

9.铁棍的长度随温度的改变发生变化,某试验室在某个时段每隔一个小时测得同一根铁棍的长度依次为 3.62,3.61,3.65,3.62,3.63,3.63,3.62,3.64(单位:cm),则

A. 铁棍长度的极差为 0.04 cm

B. 铁棍长度的众数为 3.62 cm

C. 铁棍长度的中位数为 3.625 cm

D. 铁棍长度的第 80 百分位数为 3.63 cm

10.已知圆 $C:x^2+y^2-2x-6=0$,$M(x,y)$为圆 $C$ 上任意一点,$A(1,-1)$,则

A. $|MC|=1$

B. 直线 $l:y=x+b$ 过点 $A$,则 $C$ 到直线 $l$ 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{7}-1\leqslant|MA|\leqslant\sqrt{7}+1$

D. 圆 $C$ 与坐标轴相交所得的四点构成的四边形面积为 $4\sqrt{42}$

11.已知$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$,$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}$,若在$\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2$,则

A. $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$

B. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{18}$

C. 若$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\lambda=\frac{1}{2}$

D. $\triangle ABC$ 的边 $AB$ 上的中线长为$\frac{\sqrt{7}}{6}$

12.若实数 $x,y$ 满足 $x^2-y^2-xy=2$,则

A. $|x|\geqslant2$　　B. $|x|\geqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　C. $|x+y|\geqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　D. $x^2+y^2\geqslant\frac{4\sqrt{5}}{5}$

**三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.**

13.若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\cos\beta=\frac{1}{3}$,则 $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)=$________.

14.函数 $f(x)=2x+\sqrt{1-x}$的最大值为________.

15.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 $F$,若 $F$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点 $P$ 落在 $C$ 上或 $C$ 内,则椭圆 $C$ 的离心率的取值范围为________.

16.在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=3$,$AA_1=2$,$P,Q$ 为 $A_1D_1$,$D_1C_1$ 的中点,$S$ 在 $BC$ 上,且 $BS=1$.过 $P,Q,S$ 三点的平面与长方体的六个面相交得到六边形 $PQRSMN$,则点 $M$ 到直线 $QR$ 的距离为________.



**四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明,证明过程或演算步骤.**

17.(本小题满分 10 分)

在$\triangle ABC$ 中,内角 $A,B,C$ 的对边长分别为 $a,b,c$,且$(a-c)^2=b^2-(2-\sqrt{2})ac$.

(1)求角 $B$;

(2)若 $A=\frac{\pi}{3}$,周长 $l=\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$,求 $b$.

18.(本小题满分 12 分)

正项等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,$S_3=\frac{7}{4}$,且 $a_1,\frac{5}{8},a_3$ 成等差数列,$a_{n-1}<a_n(\forall n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

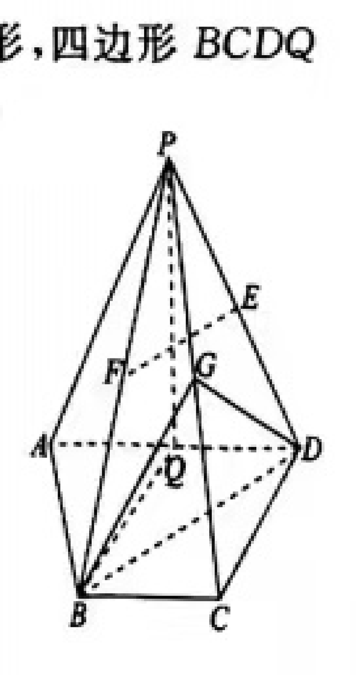
(2)若 $b_n=\frac{\log_2 a_{n+1}}{a_{n+1}}$,求$\{b_n\}$的前 $n$ 项和 $T_n$.

19.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$E,F$ 分别为 $PD,PB$ 的中点,连接 $EF$.

(1)当 $G$ 为 $PC$ 上不与点 $P$、$C$ 重合的一点时,证明:$EF/\!/$平面 $BDG$;

(2)已知 $G,Q$ 分别为 $PC,AD$ 的中点,$\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形,四边形 $BCDQ$ 是面积为 2 的矩形,当 $CD\perp PQ$ 时,求 $PC$ 与平面 $BGD$ 所成角的正弦值.




20.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点重合,且离心率为 2.

(1)求双曲线 $E$ 的标准方程;

(2)过点 $P(2,0)$的直线与双曲线 $E$ 交于 $A,B$ 两点,$O$ 为原点,是否存在直线 $l$,使 $OA\perp OB$ 成立?若存在,求出直线 $l$ 的方程;若不存在,请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

某学校组织一项竞赛,在初赛中有两轮答题:第一轮从 $A$ 类的三个问题中随机选两题作答,每答对一题得 20 分,答错得 0 分;第二轮从 $B$ 类的分值分别为 20,30,40 的 3 个问题中随机选两题作答,每答对一题得满分,答错得 0 分.若两轮总积分不低于 90 分,则晋级复赛.甲、乙同时参赛,在 $A$ 类的三个问题中,甲每个问题答对的概率均为$\frac{1}{2}$,乙只能答对两个问题;在 $B$ 类的 3 个分值分别为 20,30,40 的问题中,甲答对的概率分别为 $1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}$,乙答对的概率分别为$\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$.甲、乙回答任一问题正确与否互不影响.设甲、乙在第一轮的得分分别为 $X,Y$.

(1)分别求 $X,Y$ 的概率分布列;

(2)分别计算甲、乙晋级复赛的概率,并请说明谁更容易晋级复赛?

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)$,$g(x)=f(x)+ae^x$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)求过点$(-1,-1)$且与函数 $f(x)$的图象相切的直线方程;

(2)①求证:当 $x>0$ 时,$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$;

②若函数 $g(x)$有两个不同的零点 $x_1,x_2$,求证:$|x_2-x_1|<2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1}$.