数学(理工类)参考答案

1.C 2.A 3.D 4.A 5.B 6.B 7.D 8.B 9.C 10.D 11.B 12.D

13.8 14. $\frac{3\pi}{4}$ 15. $\frac{\pi}{12}$或$-\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$等,满足条件的任何一个φ值即可. 16. $\frac{49}{4}\pi$

17.解析:(1)应该选择模型②. …… 2分

由题可知,$R_2^2>R_1^2$,则模型②中样本数据的残差平方和$\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\hat{y}_i)^2$比模型①中样本数据的残差平方和小,即模型②拟合效果最好. …… 4分

(2)由已知$t=\frac{1}{x}$,成本费y与t可用线性回归来拟合,有$\hat{y}=\hat{d}t+\hat{c}$.

$$\hat{d}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})(t_i-\bar{t})}{\sum\limits_{i=1}^{20}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{4}{0.04}=100,$$ 6分

所以$\hat{c}=\bar{y}-\hat{d}\bar{t}=10-100\times0.08=2$,

则y关于t的线性回归方程为$\hat{y}=100t+2$. …… 8分

成本费y与同批次生产数量x的回归方程为$\hat{y}=\frac{100}{x}+2$, …… 10分

当$x=25$(吨)时,$\hat{y}=\frac{100}{25}+2=6$(万元/吨).

所以,同批次产品生产数量为25吨时y的预报值为6万元/吨. …… 12分

18.解析:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由已知有:

$a_6=1+5d$, $a_4=1+3d$, $a_2=1+d$, …… 3分

因为$a_6=3(a_4-a_2)$,即$1+5d=3(1+3d-1-d)$,

所以$d=1$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n$. …… 5分

(2)由(1)知$a_n=n$,又$b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots+2^{n-1}b_n=\frac{a_n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以$b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots+2^{n-1}b_n=\frac{n}{2}$ ①

当$n=1$时,$b_1=\frac{1}{2}$, …… 7分

(2)由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$,因为 $c=3$,且$\triangle ABC$的面积为 $3\sqrt{3}$,

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$, ………… 6分

所以 $3\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 3b\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}b}{4}$,

所以 $b=4$, ………… 8分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4^2+3^2-2\times 4\times 3\times\frac{1}{2}=13$,

所以 $a=\sqrt{13}$, ………… 11分

所以$\triangle ABC$的周长 $L=a+b+c=\sqrt{13}+4+3=7+\sqrt{13}$. ………… 12分

20. 解析:(1)当 M 为棱 BC 上靠近点 B 的三等分点时,平面 $PAM\perp$平面 PBD. ………… 1分

证明:若 M 为棱 BC 上靠近点 B 的三等分点,$AD=\sqrt{3}AB$,

所以$\frac{AB}{BM}=\frac{AB}{\frac{1}{3}AD}=\sqrt{3}$.

又$\frac{AD}{AB}=\sqrt{3}$,$\angle DAB=\angle ABM=90°$,

所以$\triangle DAB\backsim\triangle ABM$. ………… 2分

所以$\angle MAB=\angle BDA$.

又$\angle ABD+\angle BDA=90°$,

所以$\angle ABD+\angle MAB=90°$,

所以 $AM\perp BD$. ………… 3分

因为 $PD\perp$底面 $ABCD$,

所以 $PD\perp AM$, ………… 4分

所以 $AM\perp$平面 PBD. ………… 5分

而 $AM\subset$平面 PAM,

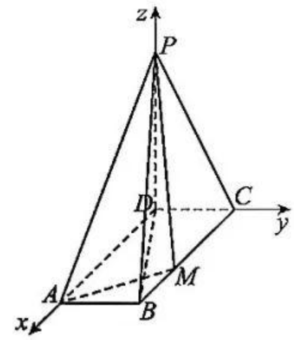
所以平面 $PAM\perp$平面 PBD. ………… 6分

(2)由(1),以 D 为坐标原点建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$,设 $AB=1$,则

$A(\sqrt{3},0,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$C(0,1,0)$,$M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},1,0\right)$. ………… 7分

$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$,$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},1,0)$. ………… 8分

设平面 MPA 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，



由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1+y_1=0,\\ -\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}z_1=0.\end{cases}$ 令 $x_1=3$，得 $y_1=\sqrt{3}$，$z_1=3$，

即 $\boldsymbol{m}=(3,\sqrt{3},3)$. …………………………………… 9 分

设平面 CPA 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{3}x_2+y_2=0,\\ -\sqrt{3}x_2+\sqrt{3}z_2=0.\end{cases}$ 令 $x_2=1$，得 $y_2=\sqrt{3}$，$z_2=1$，

即 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$. …………………………………… 10 分

设二面角 $M-PA-C$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{105}}{35}$. …… 12 分

21. 解析：(1) 由题得 $f'(x)=(x+1)(e^x-a)$，$e^x>0$，…………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=(x+1)(e^x-a)$，可知 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，符合题意；………… 2 分

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，$\ln a<-1$，知 $x<\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$\ln a<x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，此时，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，符合题意；………………………… 3 分

当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，不符合题意；………… 4 分

当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，$\ln a>-1$，知 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$-1<x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，此时，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，不符合题意. ………………………………………… 5 分

综上，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点时，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$. ………… 6 分

(2) 由 (1)，$f'(x)=(x+1)(e^x-a)$.

由于 $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1$，

当 $a\leqslant 1$ 时，可知 $f'(x)\geqslant 0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

故 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant f(0)=a\geqslant 0$

所以，$0\leqslant a\leqslant 1$ 满足条件；…………………………………… 8 分

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

当 $n\geqslant 2$ 时，有 $b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots+2^{n-2}b_{n-1}=\frac{n-1}{2}$ ②

①②两式相减，得 $2^{n-1}b_n=\frac{1}{2}$，

所以 $b_n=\frac{1}{2^n}$. ……… 10 分

所以 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$. ………………………… 12 分

19. 解析：(1) 如选择①有 $\frac{2\cos A}{bc}=\frac{\cos B}{ab}+\frac{\cos C}{ac}=\frac{c\cos B+b\cos C}{abc}$，…… 3 分

即有 $2a\cos A=c\cos B+b\cos C$，

所以 $2\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A$，又 $\sin A\neq 0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 5 分

如选择②有 $a\cos C-\sqrt{3}a\sin C=b-2c$，由正弦定理有

$\sin A\cos C-\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B-2\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C-2\sin C$

所以 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$， ………………………………………… 3 分

化简得 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

因 $A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …… 5 分

如选择③由余弦定理有 $a^2-c^2+\frac{1}{2}bc=ab\cos C=ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$，

所以 $bc=b^2+c^2-a^2$， ………………………………… 3 分

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………… 5 分

当 $a>1$ 时，可知 $0<x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以，在区间 $[0,+\infty)$ 上，当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 取得极小值，也即为最小值.

由于 $x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，

则 $f(x)_{\min}=\ln a\cdot e^{\ln a}-a\left(\frac{1}{2}\ln^2 a+\ln a-1\right)\geqslant 0$，

即有 $a\ln a-a\left(\frac{1}{2}\ln^2 a+\ln a-1\right)\geqslant 0$，

得 $\frac{1}{2}\ln^2 a\leqslant 1$，解得 $1<a\leqslant e^{\sqrt{2}}$，

综上，a 的取值范围是 $[0,e^{\sqrt{2}}]$. …… 12 分

选考题

22. 解析：(1) 由 $\rho^2=\frac{8}{5-3\cos 2\theta}$ 得 $5\rho^2-3\rho^2\cos 2\theta=8$， …… 1 分

即 $5\rho^2-3\rho^2(2\cos^2\theta-1)=8$，即 $4\rho^2-3(\rho\cos\theta)^2=4$. …… 3 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$ 代入上式，得 $x^2+4y^2=4$. …… 5 分

(2) 将直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数) 代入曲线 C 的方程 $x^2+4y^2=4$，整理

得 $(1+3\sin^2\alpha)t^2+2\sqrt{3}\cos\alpha t-1=0$. …… 6 分

由 t 的几何意义可设 $|MA|=|t_1|$，$|MB|=|t_2|$.

因点 M 在椭圆内，方程必有两个实根，

所以 $t_1+t_2=-\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$，……①

$t_1\cdot t_2=-\frac{1}{1+3\sin^2\alpha}$. ……② …… 7 分

由 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$ 知 $|t_1|=2|t_2|$，

即 $t_1=-2t_2$. ……③ …… 8 分

联立①③得 $t_2=\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$，……④

将③④代入②得 $2\left(\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}\right)^2=\frac{1}{1+3\sin^2\alpha}$，

解得 $\cos^2\alpha=\frac{4}{27}$，$\sin^2\alpha=\frac{23}{27}$. …… 9 分

所以直线 l 的斜率 $k=\pm\frac{\sqrt{23}}{2}$. ………………………………………………… 10 分

23. (1)证明：$(a+2)^2+(b+1)^2=(a+2)^2+(3-a)^2=2a^2-2a+13=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$, …… 1 分

由于 $a>0$, $b>0$ 且 $a+b=2$, 则 $0<a<2$,

$2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}\geqslant\frac{25}{2}$, 当且仅当 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ 时等号成立， ……………………………… 3 分

又 $0<a<2$ 时，可得 $2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}<17$,

所以 $\frac{25}{2}\leqslant(a+2)^2+(b+1)^2<17$. ……………………………………………………… 5 分

(2) $|3x+m+1|+|3x-m-1|\geqslant|2m+2|$, ………………………………………… 6 分

又 $a>0$, $b>0$ 且 $a+b=2$,

$(\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3})^2=a+b+6+2\sqrt{a+3}\cdot\sqrt{b+3}$

$\leqslant 8+a+3+b+3$

$=16$, …………… ……………………… 8 分

所以 $\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}\leqslant 4$, 当且仅当 $a=b=1$ 取等号. 则 $|2m+2|\geqslant 4$,

则 $|2m+2|\geqslant 4$, 得 $2m+2\leqslant -2$, 或 $2m+2\geqslant 2$,

解得 $m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 0$.

所以 m 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$. …………………… 10 分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。