2023年高三学业质量检测(三)

文科数学

本试卷总分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

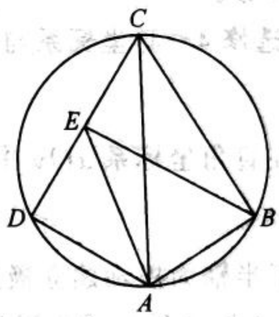
1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\left|1-\frac{x-1}{2}\right|<\frac{1}{2}\right.\right\}$,$B=\{x|x^2-7x+10\geqslant 0\}$,则下列结论正确的是

A. $2\in A$　　B. $5\notin B$　　C. $3\in(A\cap \complement_{\mathbf{R}}B)$　　D. $[2,5]\subseteq(A\cup B)$

2. 设复数 $z=(1-2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})(a\in\mathbf{R})$,$z$ 的实部与虚部互为相反数,则 $a=$

A. -3　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 2　　D. 3

3. 如图,在圆内接四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=120°$,$AB=AD=1$,$AC=2$.若 E 为 CD 的中点,则$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$的值为



A. -3

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. 3

4. 某市为比较甲、乙两个旅游景点的经营状况,将这两个旅游景点2021年12个月的月收入(单位:万元)绘制成了如下茎叶图:

甲		乙
	1	7 7
8 4 2 0	2	0 4
6 5 5 4 3 2	3	0 1 2 3
9 8	4	3 4 9
	5	6

则

A. 甲景点的月收入的中位数小于乙景点的月收入的中位数

B. 甲景点的月收入的平均数小于乙景点的月收入的平均数

C. 甲景点的月收入的极差大于乙景点的月收入的极差

D. 甲景点的月收入的方差小于乙景点的月收入的方差

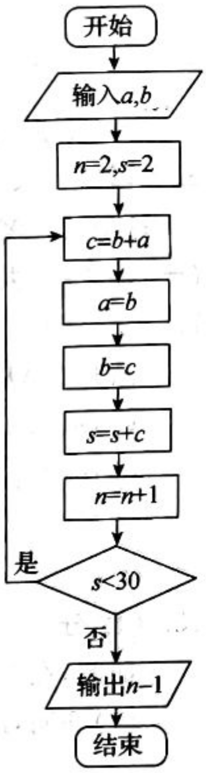
5. 设实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y\geqslant x-2,\\ y\leqslant 2x,\\ 2x+y\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 且倾斜角为 30°的直线交抛物线于点 M（M 在第一象限），$MN\perp l$，垂足为 N，直线 NF 交 x 轴于点 D，则 $|FD|=$

A. 2　　B. $\sqrt{3}$

C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

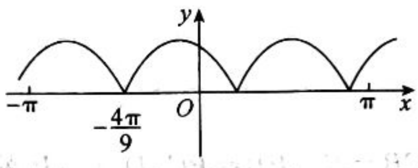


7. 执行如图所示的程序框图，如果输入的 $a=1,b=1$，那么输出的值为

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

8. 已知函数 $f(x)=\left|\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ 的部分图象如图所示，则 $\omega=$



A. 1　　B. $\dfrac{3}{2}$

C. 2　　D. $\dfrac{5}{2}$

9. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，L,M,N 分别为棱 A_1B_1,AD,CC_1 的中点，则平面 LMN 与平面 CBD_1 的位置关系是

A. 垂直　　B. 相交不垂直　　C. 平行　　D. 重合

10. 中国古代著作《张丘建算经》有这样一个问题："今有马行转迟，次日减半疾，七日行七百里"，意思是说有一匹马行走的速度逐渐减慢，每天行走的里程是前一天的一半，七天一共行走了 700 里路，则该马第五天走的里程数约为

A. 2.76　　B. 5.51　　C. 11.02　　D. 22.05

11. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x$，$g(x)=\cos\omega x-\sin\omega x$，$\omega>0$，在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上，若 $f(x)$ 为增函数，$g(x)$ 为减函数，则 ω 的取值范围是

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $(0,1]$　　C. $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$

12. 已知四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD\parallel BC$，$AD=2$，$BC=4$，$\angle ABC=60°$，梯形 $ABCD$ 的四个顶点在半径为 4 的球面上．若 S 是该球面上的任意一点，当四棱锥 S-$ABCD$ 的体积最大时，其高为

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}+2$　　C. $2\sqrt{3}+4$　　D. 6

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_2=-4$，$a_2+a_3=-8$，则$\{a_n\}$的公差为________.

14. 志愿者在打赢疫情防控阻击战中贡献了自己的力量．现从 3 名男性志愿者和 2 名女性志愿者中，任选 3 名参加社区志愿服务，则既有男性志愿者又有女性志愿者的概率为________.

15. 已知抛物线 $y=x^2+2x-3$ 的顶点为 P，与坐标轴交于 A,B,C 三点，则过四点 A,B,C,P 中的三点的一个圆的标准方程为________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x\leqslant 0, \\ \ln x, x>0, \end{cases}$ $g(x)=f(f(x))-a$，若 $g(x)$ 有 2 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\sin B=2\sin C$，$a=2b\cos B$.

(1)求 $\cos A$；

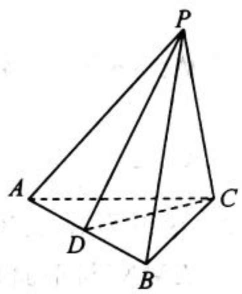
(2)证明：$\sin(B-C)=2\cos B\sin C$.

18. (12 分)

如图，在三棱锥 P-ABC 中，$\angle ACB=90°$，$PB=PC$，D 为 AB 的中点.

(1)证明：$BC\perp PD$；

(2)若 $AC=BC=1$，$PA=\dfrac{3}{2}$，$PB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，求三棱锥 P-ACD 的体积.



19. (12 分)

科教兴国，科技强国，人工智能教育是将人工智能与传统教育相结合，借助人工智能和大数据技术打造的智能化教育平台.为了解我国人工智能教育发展状况，通过中国互联网数据平台得到我国 2016 年－2021 年人工智能教育市场规模统计表.如下表所示，若用 x 表示年份代码(2016 年用 1 表示，2017 年用 2 表示……依次类推)，用 y 表示市场规模(单位：亿元)，

年份编号 x	1	2	3	4	5	6
年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021
市场规模 y/亿元	254	354	454	954	1 654	2 054

(1)根据统计表中的数据，计算市场规模 y 的平均值，及 y 与 x 的样本相关系数 r，并判断两个变量 y 与 x 的相关关系的强弱(若 $|r|\geqslant 0.75$，则认为相关性较强；否则没有较强的相关性，精确到 0.01)；

(2)若 y 与 x 的相关关系拟用线性回归模型表示，试求 y 关于 x 的线性回归方程，并据此预测 2023 年中国人工智能教育市场规模(精确到 0.1).

附：线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$；

样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}$；

参考数据：$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=26\ 734$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2}=200\sqrt{70}$.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax-a$.

(1)若 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $f(x)$存在零点，且零点的绝对值都小于 2，求实数 a 的取值范围.

21.（12 分）

已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为坐标轴，且过点 $A(2,0)$，$B\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 直线 $x=t$（不经过点 B）与椭圆 E 交于M，N 两点，$Q(1,0)$，直线 MQ 与椭圆E 交于另一点 C，点 P 满足$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{NC}=0$，且 P 在直线 NC 上.

(1)求 E 的方程；

(2)证明：直线 NC 过定点，且存在另一个定点 R，使$|PR|$为定值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{4t}{1+t^2},\\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+3\rho\sin\theta-a=0$.

(1)求 C 的普通方程和 l 的直角坐标方程；

(2)若 C 与 l 有公共点，求实数 a 的取值范围.

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a+b+c=1$.

(1)若 $a,b,c\in(0,+\infty)$，求$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$的最小值；

(2)求$(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2$ 的最小值.