湖北省高中名校联盟2022～2023学年度下学期高二联合测评

数学试卷

命题学校及命题人:夷陵中学　吴峻峰、余勤、曹俊松、夏咏芳　　　　审题单位:圆创教育教研中心　湖北省武昌实验中学

本试题共6页,22题。满分150分。考试用时120分钟。　　　　考试时间:2023年5月30日上午8:00—10:00

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8个小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

2. 已知递增的等比数列 $\{a_n\}$ 中,前3项的和为7,前3项的积为8,则 a_4 的值为

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3. 已知离散型随机变量 X 等可能地取值 $1,2,3,\cdots,n$,若 $P(1\leqslant X\leqslant 3)=\frac{1}{2}$,则正整数 n 的值为

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

4. 现从3名女生和2名男生中随机选出2名志愿者,用 X 表示所选2名志愿者中男生的人数,则 $E(X)$ 为

A. 0.6　　B. 0.8　　C. 1　　D. 1.2

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为2,点 F_1,F_2 分别为曲线 C 的左,右焦点,点 M 为 F_1 关于一条渐近线的对称点,若 $|MF_2|=2\sqrt{3}$,则双曲线 C 的方程为

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

C. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

6. 现有红色、黄色、蓝色、黑色小球各一个，放入编号为1,2,3的三个抽屉中，则恰好有1个抽屉为空的不同放法有

A. 24种　　　　B. 42种

C. 60种　　　　D. 84种

7. 任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘3再加上1；若是偶数，就将该数除以2. 反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 $4\to2\to1$，这就是数学史上著名的"冰雹猜想". 如取整数 $m=6$，根据上述运算法则得出 $6\to3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$，共需经过8个"雹程"变成1. 现给出冰雹猜想的一个递推关系：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=10$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时},\\ 3a_n+1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时},\end{cases}$ 则满足 $a_n=1$ 时的"雹程"为

A. 5　　　　B. 6

C. 7　　　　D. 8

8. 已知 $M=\dfrac{3(2-\ln3)}{e^2}$，$N=\ln\sqrt[3]{3}$，$P=\dfrac{2-\ln4}{e}$，则

A. $P<N<M$　　　　B. $N<P<M$

C. $P<M<N$　　　　D. $M<N<P$

二、选择题：本题共4个小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 下列说法正确的是

A. 100件产品中包含10件次品，不放回的随机抽取6件，其中次品数 $Y\sim B(6,0.1)$

B. 一组数据的方差一定是正数

C. 张同学从家里到学校要经过4个红绿灯路口，每个路口可能遇到红灯或绿灯，这个随机试验的样本空间有16个元素

D. 对一组给定的样本数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n) 的统计分析中，当样本相关系数 $|r|$ 越接近1时，样本数据的线性相关程度越强

10. 宠物很可爱，但身上会有寄生虫，小猫“墩墩”的主人每月定期给“墩墩”滴抹驱虫剂. 刚开始使用的时候，寄生虫的数量还会继续增加，随着时间的推移，寄生虫增加的幅度逐渐变小，到一定时间，寄生虫数量开始减少. 若已知使用驱虫剂 t 小时后寄生虫的数量大致符合函数 $f(t)=(t-47)e^{-t}+50(0\leqslant t<720)$，$f'(t)$ 为 $f(t)$ 的导数，则下列说法正确的是

A. 驱虫剂可以杀死所有寄生虫

B. $f'(100)$ 表示 $t=100$ 时，寄生虫数量以 $52e^{-100}$ 的速度在减少

C. 若存在 a、b，$a\neq b$，使 $f(a)=f(b)$，则 $a+b<96$

D. 寄生虫数量在 $t=48$ 时的瞬时变化率为 0

11. 下列关于数列 $\{a_n\}$ 结论正确的是

A. 若前 n 项和 $S_n=3n^2+1$，则 $a_n=6n-3$

B. 若 $a_1=3$，$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，则 $a_4=\dfrac{9}{7}$

C. 若 $a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in \mathbf{N}^*)$，$a_1=m$，$a_2=n$，则该数列前 2023 项的和为 m

D. 若 $a_n=\dfrac{n^3}{3^n}$，则 $\{a_n\}$ 的最大项为 1

12. 已知实数 x、y，令 $f(x,y)=\lambda[\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}]+\mu\sqrt{(1+x)^2+y^2}\cdot\sqrt{(1-x)^2+y^2}$，下列说法中正确的是

A. 当 $\lambda=1$，$\mu=0$ 且 $0<x<1$，$0<y<1$ 时，$f(x,y)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

B. 当 $\lambda=1$，$\mu=0$ 且 $0<x<1$，$0<y<1$，$f(x,y)$ 取最小值时，有序数对 (x,y) 的值有 4 个

C. 当 $\lambda=0$，$\mu=1$ 时，满足 $f(x,y)=\sqrt{2}$ 的点 $P(x,y)$ 的轨迹关于 $O(0,0)$ 对称

D. 当 $\lambda=0$，$\mu=1$ 时，满足 $f(x,y)=1$ 的点 $P(x,y)$ 到原点 $O(0,0)$ 距离的最大值为 $\sqrt{2}$

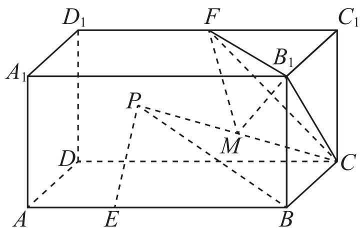
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，若 $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant a)$，则 $a=$__________.

14. $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为__________.（用数字作答）

15. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左,右焦点分别为 F_1,F_2,过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A、B 两点,AF_2、BF_2 分别交 y 轴于 P、Q 两点,$\triangle PQF_2$ 的周长为 6. 过 F_2 作$\angle F_2AF_1$ 外角平分线的垂线与直线 BA 交于点 N,若$|ON|=\sqrt{37}$,则椭圆 C 的方程为__________.

16. 如图,点 P 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内部运动,点 E 在棱 AB 上,且 $BE=3AE$,动点 P 满足 $PB=2PE$,F 为棱 C_1D_1 的中点,M 为线段 PC 的中点,若 $AB=4$,$AD=AA_1=2$,则动点 M 到平面 B_1CF 距离的最小值为__________.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程及演算步骤.

17. (10 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 S_n 满足 $S_n=2^{n+1}-2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=na_n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18. (12 分)已知圆 $C:x^2+y^2=16$,直线 $l:(2+k)x+(1+k)y+k=0$.

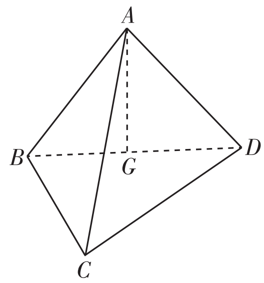
(1)证明:直线 l 和圆 C 恒有两个交点;

(2)若直线 l 和圆 C 交于 A,B 两点,求$|AB|$的最小值及此时直线 l 的方程.

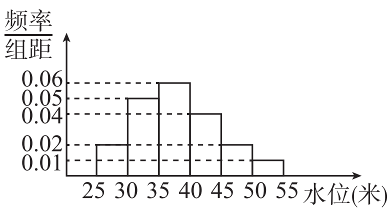
19. (12分)如图,在三棱锥 $A-BCD$ 中,$\angle BCD=90^{\circ}$,$AB=AC=AD$,BD 的中点为 G.

(1)证明:直线 $AG\perp$ 平面 BCD;

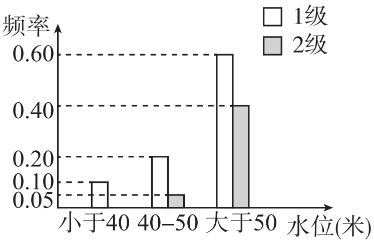
(2)若 $BD=2$,$BC=1$,当直线 AB 与平面 ACD 所成的角最大时,求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



20. (12分)每年七月下旬至八月上旬为湖北防汛关键期,湖北 A 地区防汛指挥部依据该地河流8月份的水文观测点的历史统计数据,所绘制的频率分布直方图如图甲所示;依据当地的地质构造,得到水位与灾害等级的频率分布条形图如图乙所示.



甲



乙

(1)以频率作为概率,试估计该地在8月份发生1级灾害的概率;

(2)该地 A 河流域某企业,在今年8月份,若没受1、2级灾害影响,利润为500万元;若受1级灾害影响,则亏损100万元;若受2级灾害影响则亏损1000万元.此企业有如下三种应对方案:

方案	防控等级	费用(单位:万元)
方案一	无措施	0
方案二	防控1级灾害	40
方案三	防控2级灾害	100

试问,如仅从利润考虑,该企业应选择这三种方案中的哪种方案?说明理由.

21. (12 分)已知抛物线 $\Gamma_1: y^2=4x$, $\Gamma_2: x^2=y$.

(1)当直线 l_1 过抛物线 Γ_1 的焦点 F 时,与抛物线 Γ_1 交于 P,Q 两点,在 l_1 上取不同于 F 的点 M,使得 $\dfrac{|FP|}{|FQ|}=\dfrac{|MP|}{|MQ|}$,求点 M 的轨迹方程;

(2)已知 A、B、C 是抛物线 Γ_2 上的三个点,且直线 CA、CB 分别与抛物线 Γ_1 相切,证明:直线 AB 与抛物线 Γ_1 相切.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=2\sin x-\ln(1+x)$.

(1)证明:函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 有唯一的极值点,及唯一的零点;

(2)设 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的极值点为 α,零点为 β,比较 2α 与 β 的大小,并证明你的结论.