湘考王·2023年湖南省高三联考试题参考答案

数　学

1.【答案】D

【解析】$A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\left\{x\middle| x>\dfrac{1}{2}\right\}$，

则 $A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}\cap\left\{x\middle| x>\dfrac{1}{2}\right\}=\left\{x\middle|\dfrac{1}{2}<x\leqslant 3\right\}$.

故选 D

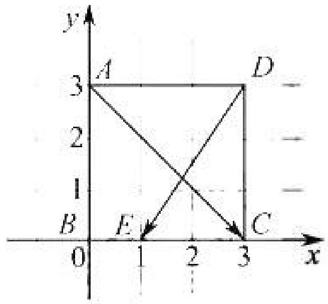
2.【答案】C

【解析】$(1+z)\cdot\overline{z}=(2+2i)(1-2i)=2+4-4i+2i=6-2i$.

故选 C

3.【答案】A

【解析】以 B 为原点建立如图所示的平面直角坐标系.



$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$，且边长为 3.

所以 $A(0,3)$，$E(1,0)$，$C(3,0)$，$D(3,3)$.

所以 $\overrightarrow{AC}=(3,-3)$，$\overrightarrow{DE}=(-2,-3)$.

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=3\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3)=3$.

故选 A

4.【答案】B

【解析】因为圆锥内积水的高度是圆锥总高度的一半，所以圆锥内积水部分水面的半径为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times 200=50$ mm，故积水量 $V_{水}=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 50^2\times 150=125\ 000\pi$，

所以此次降雨在平地上积水的厚度 $h=\dfrac{125\ 000\pi}{100^2\pi}=12.5$ mm，

因为 $10.0<12.5<24.9$，所以这一天的雨水属于中雨.

故选 B

5.【答案】A

【解析】从 8 个点中任取 3 个点，共有 $C_8^3=56$ 种情况，这三个点恰好位于同一个奥林匹克环上有 $3\times C_4^3=12$ 种情况，则所求的概率 $P=\dfrac{12}{56}=\dfrac{3}{14}$.

故选 A.

6.【答案】B

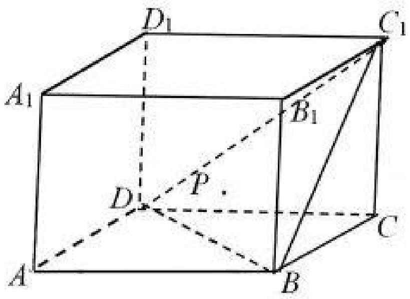
【解析】由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{4}{\sin B}$，

所以 $BC=\dfrac{4\sin A}{\sin B}=\dfrac{4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)}{\sin B}=4\left(\dfrac{1}{2\tan B}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\dfrac{\pi}{3}<B<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $BC\in\left(2\sqrt{3},\ \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right)$.

故选 B

7.【答案】A



【解析】由题设知点 P 在以 A_1 为球心，半径 $R=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 的球面上，所以点 P 的轨迹就是该球与三棱锥 C_1-BCD 的表面的交线.

由正方体性质易知点 A_1 到平面 C_1BD 的距离 $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以球 A_1 在平面 C_1BD 上的截面圆的半径 $r_1=\sqrt{R^2-d^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 截面圆的圆心 O_1 是正△C_1BD 中心. 正△C_1BD 的边长为$\sqrt{2}$，其内切圆 O_1 的半径 $r_0=\dfrac{\sqrt{6}}{6}<r_1$. 因此，点 P 在面 C_1BD 内的轨迹是圆 O_1 在△C_1BD 内的弧长，如图 1 所示. $\cos\angle MO_1H=\dfrac{O_1H}{O_1M}=\dfrac{r_0}{r_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

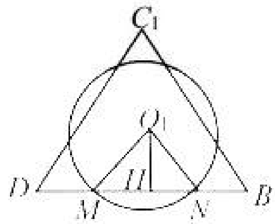


图 1

所以 $\angle MO_1H=\dfrac{\pi}{4}$，从而 $\angle MO_1N=\dfrac{\pi}{2}$，故点 P 在此面内的轨迹长度为 $r_1\left(2\pi-3\times\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

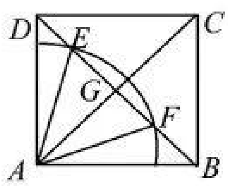


图 2

因为 $AA_1\perp$平面 $ABCD$，所以球 A_1 在平面 $ABCD$ 上的截面圆心为 A，其半径 $r_2=\sqrt{R^2-AA_1^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，又 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\sqrt{6}}{3}<1$，所以点 P 在平面 BCD 内的轨迹是一段弧 $\widehat{EF}$，如图 2 所示. $\cos\angle GAE=\dfrac{AG}{AE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle GAE=\dfrac{\pi}{6}$，从而 $\angle EAF=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\widehat{EF}=\dfrac{\sqrt{6}\pi}{9}$. 由于对称性，点 P 在平面 C_1BD 和平面 C_1CD 内的轨迹长度都是 $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{9}$，故点 P 在三棱锥 C_1-BCD 的表面上的轨迹的长度是 $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}+3\times\dfrac{\sqrt{6}\pi}{9}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{6}\pi$.

故选 A

8.【答案】D

【解析】构造函数 $T(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，因为 $f(-x)+f(x)=x^2$，

所以 $T(x)+T(-x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+f(-x)-\frac{1}{2}(-x)^2=f(x)+f(-x)-x^2=0$，

所以 $T(x)$ 为奇函数.

当 $x\leqslant 0$ 时，$T'(x)=f'(x)-x<0$，$T(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，所以 $T(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

因为 $f(x)-f(1-x)\geqslant x-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)-\frac{1}{2}x^2\geqslant f(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2$，

即 $T(x)\geqslant T(1-x)$，所以 $x\leqslant 1-x$，即 $x\leqslant\frac{1}{2}$.

故选 D

9.【答案】ABD

【解析】

$f(x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\times$ $\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 A 正确；

对于 B，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以 B 正确；

对于 C，由 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 C 错误；

对于 D，$y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$，得 $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以函数 $f(x)$ 的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到，所以 D 正确.

故选 ABD

10.【答案】AC

【解析】若 $q<0$，因为 $a_1>1$，所以 $a_6<0$，$a_7>0$，则 $a_6\cdot a_7<0$ 与 $a_6\cdot a_7>1$ 矛盾，

若 $q\geqslant 1$，因为 $a_1>1$，所以 $a_6>1$，$a_7>1$，则 $\frac{a_6-1}{a_7-1}>0$，与 $\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$ 矛盾，所以 $0<q<1$，故 A 正确；

因为 $\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$，则 $a_6>1>a_7>0$，所以 $a_6a_8=a_7^2<1$，故 B 错误；

由 $a_6>1>a_7>0$，故 C 正确；

而 $T_{13}=a_7^{13}<1$，故 D 错误.

故选 AC

11.【答案】ABD

【解析】由抛物线定义知 $|AA_1|=|AF|$，又 l 平分 $\angle A_1AB$，所以 $\triangle AFP\cong\triangle AA_1P$，从而 $\angle AFP=\angle AA_1P=90^\circ$，即 $AF\perp PF$，所以 A 正确；

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，AB 方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，代入 C 方程得 $y^2-2pmy-p^2=0$，则 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，故 B_1 的坐标是 $\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{y_1}\right)$，从而 $k_{OA}=\frac{2p}{y_1}=k_{OB_1}$，所以 A、O、$B_1$ 三点共线，即 B 正确；

若原点 O 是 $\triangle PAB$ 的重心，则 $x_1+x_2+x_P=0$，即 $x_1+x_2=\frac{p}{2}$，而 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+p=(2m^2+1)$，因为 $p>0$，所以 $(2m^2+1)p\neq\frac{p}{2}$，故 C 错误；

因为 $|BF|=|BB_1|>\frac{p}{2}=|OF|$，所以 $\triangle OBF$ 不可能是正三角形，故 D 正确.

故选 ABD

12.【答案】AB

【解析】因为 $f(2)=0$，即 $a^2+b^2=c^2$，又 a，b，$c\in(0,+\infty)$，所以 $0<\frac{a}{c}<1$，$0<\frac{b}{c}<1$.

由 $f(x)=a^x+b^x-c^x=c^x\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x-1\right]$，令 $g(x)=\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x-1$，则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减，

且 $g(2)=0$，所以 $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$，$g(3)<0$，故 A，B 正确；

取 $a=3$，$b=4$，$c=5$，则 $f(1)=2>f\left(\frac{1}{2}\right)$，所以 C 错误；

令 $a=c\cos\theta$，$b=c\sin\theta$，$\theta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，

$$\begin{aligned}\text{则 } f(1)f(-1)&=(\sin\theta+\cos\theta-1)\cdot\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\\&=(\sin\theta+\cos\theta-1)\cdot\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}-1\right),\end{aligned}$$

令 $\sin\theta+\cos\theta=t$，$t\in(1, \sqrt{2}]$，则 $f(1)f(-1)=(t-1)\cdot\left(\frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}-1\right)=\frac{-t^2+2t+1}{t+1}=4-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)$，

而 $t+1\in(2,\sqrt{2}+1]$，所以 $f(1)f(-1)\in[5-3\sqrt{2},1)$，所以 D 错误.

故选 AB

13.【答案】1 080

【解析】由题可知 $2^n=32$，解得 $n=5$，则 $\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的通项为

$T_{r+1}=C_5^r(3x^2)^{5-r}\cdot(-2\cdot x^{-1})^r=(-2)^r\cdot3^{5-r}\cdot C_5^r\cdot x^{10-3r}$，令 $10-3r=4$，解得 $r=2$，则 x^4 系数为 $(-2)^2\cdot3^3\cdot C_5^2=4\times27\times10=1\,080$.

故答案为 1 080

14.【答案】8 186

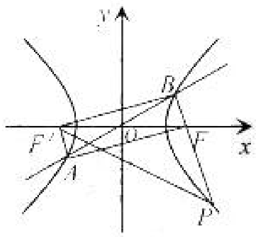
【解析】由题意得：$P(500-4<X\leqslant500+4)=0.682\,7$，$P(500-8<X\leqslant500+8)=0.954\,5$，则 $P(492<X\leqslant496)=\dfrac{0.954\,5-0.682\,7}{2}=0.135\,9$，

故 $P(492<X\leqslant504)=0.135\,9+0.682\,7=0.818\,6$，

则袋装质量在区间 $(492,504]$ 的食品约有 $100\,00\times0.818\,6=8\,186$（袋）.

故答案为 8 186

15.【答案】$\dfrac{\sqrt{17}}{3}$



【解析】设左焦点为 F'，$|BF|=m$，则 $|PF|=2m$，连接 BF'，PF'，则 $|BF'|=2a+m$，$|PF'|=2a+2m$，由 $AF\perp BF$ 易知四边形 $AF'BF$ 为矩形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BF'P$ 中，$|BF'|^2+|BP|^2=|PF'|^2$，

即 $(2a+m)^2+(3m)^2=(2a+2m)^2$，化简得 $m=\dfrac{2a}{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFF'$ 中，$|BF'|^2+|BF|^2=|F'F|^2$，

即 $(2a+m)^2+m^2=(2c)^2(*)$，将 $m=\dfrac{2a}{3}$ 代入 $(*)$ 式得 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{17}{9}$，即 $e=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

故答案为 $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

16.【答案】$\dfrac{1}{e}$

【解析】由 $me^{mx}\geqslant\ln x$ 得 $mxe^{mx}\geqslant x\ln x$，即 $mxe^{mx}\geqslant e^{\ln x}\cdot\ln x$.

令 $f(x)=xe^x$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(mx)\geqslant f(\ln x)$，

所以 $mx\geqslant\ln x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $m\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的极大值是 $\dfrac{1}{e}$，即最大值是 $\dfrac{1}{e}$，所以 $m\geqslant$

$\frac{1}{e}$，即实数 m 的最小值是 $\frac{1}{e}$.

17.【解析】(1) 依题意可得，当 $n=1$ 时，$2S_1=2a_1=a_1^2+a_1$，$a_n>0$，则 $a_1=1$；

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_n=a_n^2+a_n$，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，两式相减，整理可得

$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，

又 $\{a_n\}$ 为正项数列，故可得 $a_n-a_{n-1}=1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首项，$d=1$ 为公差的等差数列，所以 $a_n=n$. ……5 分

(2) 证明：由 (1) 可知 $a_n=n$，所以 $b_n=\frac{4}{n(n+2)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2}$，

$$T_n=\frac{4}{1\times3}+\frac{4}{2\times4}+\frac{4}{3\times5}+\cdots+\frac{4}{n(n+2)}$$

$$=\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{2}-\frac{2}{4}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{4}-\frac{2}{6}+\cdots+\frac{2}{n-2}-\frac{2}{n}+\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2}$$

$=2+1-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}<3$，所以 $T_n<3$ 成立. ……10 分

18.【解析】(1) 设 $A_i=$ "小明与第 $i(i=1,2,3)$ 类棋手相遇"，根据题意 $P(A_1)=0.5$，$P(A_2)=0.25$，$P(A_3)=0.25$.

记 $B=$ "小明获胜"，则有

$P(B\mid A_1)=0.3$，$P(B\mid A_2)=0.4$，$P(B\mid A_3)=0.5$. ……3 分

由全概率公式，小明在比赛中获胜的概率为

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$$
$$=0.5\times0.3+0.25\times0.4+0.25\times0.5$$
$$=0.375.$$

所以小明获胜的概率为 0.375. ……7 分

(2) 小明获胜时，则与小明比赛的棋手为一类棋手的概率为

$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.5\times0.3}{0.375}=0.4$，

即小明获胜，对手为一类棋手的概率为 0.4. ……12 分

19.【解析】(1) 由侧面 PAD 的面积为 $\sqrt{10}$，得 $\frac{1}{2}\cdot PA\cdot AB\sin\angle PAB=\sqrt{10}$，又 $PA=\sqrt{10}$，$AB=2$，所以 $\sin\angle PAB=1$，从而 $\angle PAB=90^\circ$，即 $AB\perp PA$，又 $AB\perp AD$，故 $AB\perp$ 平面 PAD，而 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ……4 分

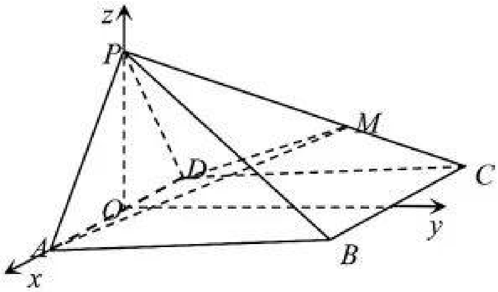
(2) 取 AD 的中点 O，连接 OP，因为 $PA=PD$，所以 $OP\perp AD$，

由 (1)，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，而 $OP\subset$ 平面 PAD，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，所以 $OP\perp$ 平面 $ABCD$.

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$，

因为 $OP=\sqrt{PA^2-OA^2}=3$，所以 $P(0,\ 0,\ 3)$，$\overrightarrow{PC}=(-1,\ 2,\ -3)$，$S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}AD\cdot OP=3$，

设 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则 $V_{P\text{-}ADM}=V_{M\text{-}PAD}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAD}\cdot y_0=y_0=\frac{4}{3}$. ……7 分



设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，

即 $(x_0,\ y_0,\ z_0-3)=\lambda(-1,\ 2,\ -3)$，

所以 $\lambda=\frac{y_0}{2}=\frac{2}{3}$，从而 $x_0=-\frac{2}{3}$，$z_0=1$，

故 $M\left(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 1\right)$，

于是 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ 1\right)$，

又 $\overrightarrow{PA}=(1,\ 0,\ -3)$，$\overrightarrow{AB}=(0,\ 2,\ 0)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$ 是平面 PAB 的一个法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-3z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(3,\ 0,\ 1)$. ……10 分

设直线 AM 与平面 PAB 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AM}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\frac{5\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{5}}{25},$$

即直线 AM 与平面 PAB 所成的角的正弦值为 $\frac{6\sqrt{5}}{25}$. ……12 分

20.【解析】(1) 连接 BD，由余弦定理可得：

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos A$，

$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C=4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos C$，

所以 $20-16\cos A=52-48\cos C$.

又四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，所以 $A+C=\pi$，

所以 $20-16\cos(\pi-C)=52-48\cos C$，化简可得 $\cos C=\frac{1}{2}$，

又 $C\in(0,\ \pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……5 分

(2) 设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，则 $S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin A+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot\sin C$，

又 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A$

$\quad\quad=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C$，

所以$\begin{cases} S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\sin A+\dfrac{1}{2}\times 4\times 6\sin C, \\ 2^2+4^2-2\times 2\times 4\cos A=4^2+6^2-2\times 4\times 6\cos C, \end{cases}$

即$\begin{cases} \dfrac{S}{4}=\sin A+3\sin C, \\ 2=3\cos C-\cos A, \end{cases}$

平方后相加得$\dfrac{S^2}{16}+4=10+6\sin A\sin C-6\cos A\cos C$，

即$\dfrac{S^2}{16}=6-6\cos(A+C)$， ……8 分

又$A+C\in(0,\ 2\pi)$，所以$A+C=\pi$时，$\dfrac{S^2}{16}$有最大值，即S有最大值.

此时，$A=\pi-C$，代入$2=3\cos C-\cos A$得$\cos C=\dfrac{1}{2}$.

又$C\in(0,\ \pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{3}$.

在$\triangle BCD$中，可得：$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C=4^2+6^2-2\times 4\times 6\times\cos\dfrac{\pi}{3}=28$，

即$BD=2\sqrt{7}$. ……12 分

21.【解析】(1) 设椭圆E的焦距为$2c$，由题设知$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且当点$M$在椭圆$E$的短轴端点处时$\triangle MAB$的面积最大，所以$\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=2\sqrt{2}$，即$ab=2\sqrt{2}$，又$a^2=b^2+c^2$，从而解得$a=2$，$b=c=\sqrt{2}$，故椭圆$E$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……3 分

(2) 由 (1) 知，$A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，由题意可设直线l的方程为$x=ty+1$，
因为点$D(1,\ 0)$在椭圆E内，直线l与E总相交，

由$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1, \\ x=ty+1 \end{cases}$得$(t^2+2)y^2+2ty-3=0$，

设$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，则$y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+2}$，

(ⅰ) 由P，A，M共线，得$\dfrac{n}{m+2}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$， ①

由P，B，N共线，得$\dfrac{n}{m-2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$， ②

则由①÷②得$\dfrac{m-2}{m+2}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{x_2-2}{y_2}$， ③

又$\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{2}=1$，所以$\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{2-x_1}{2y_1}$， ④

将④代入③，得

$$\frac{m-2}{m+2}=-\frac{(x_1-2)(x_2-2)}{2y_1y_2}$$
$$=-\frac{(ty_1-1)(ty_2-1)}{2y_1y_2}$$
$$=-\frac{t^2y_1y_2-t(y_1+y_2)+1}{2y_1y_2}$$
$$=-\frac{\dfrac{-3t^2}{t^2+2}+\dfrac{2t^2}{t^2+2}+1}{\dfrac{-6}{t^2+2}}$$
$$=\frac{1}{3}$$

所以 $m=4$. ……8 分

（ⅱ）点 B 一定在以 MN 为直径的圆内．证明如下：

点 B 在以线段 MN 为直径的圆内 $\Leftrightarrow\angle MBN$ 为钝角

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}<0\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}>0.$$ ⑤

因为$\overrightarrow{BM}=(x_1-2，y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(2，n)$，

所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}=2(x_1-2)+ny_1$．

由③、④，有 $ny_1=3(2-x_1)$，故$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}=2(x_1-2)+ny_1=2-x_1$．而 $-2<x_1<2$，从而$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}>0$．即⑤成立．所以点 B 一定在以 MN 为直径的圆内. ……12 分

22.【解析】(1) 令 $F(x)=f(x)-g(x)=x\ln x-2x-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})^2+\mathrm{e}$，则 $F(\mathrm{e})=0$，

所以，当 $x=\mathrm{e}$，$f(x)=g(x)$；

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$F'(x)=\ln x+1-2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})=\ln x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，

令 $\varphi(x)=F'(x)=\ln x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0\Rightarrow\varphi(x)$在$(\mathrm{e}，+\infty)$上单调递减，

所以，$\varphi(x)<\varphi(\mathrm{e})=0$，即 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$在$(\mathrm{e}，+\infty)$上单调递减，

所以，$F(x)<F(\mathrm{e})=0$，即当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f(x)<g(x)$；

同理可得，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f(x)>g(x)$.

综上：当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f(x)>g(x)$；当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=g(x)$；当 $\mathrm{e}<x$ 时，$f(x)<g(x)$. ……5 分

(2) 先证明：$2\mathrm{e}<x_1+x_2$. 不妨令 $x_1<x_2$.

因为 $f(x)$定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1-2=\ln x-1$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\mathrm{e}$. 所以，当 $x\in(0，\mathrm{e})$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in(\mathrm{e}，$

$+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，从而$0<x_1<e<x_2$.

记$g(x)$的两个零点分别为x_3，x_4，且$x_3<x_4$，

因为$g(x)$图象是关于直线$x=e$对称的抛物线，所以$x_3+x_4=2e$.

又由（1）可知$x_3<x_1$，$x_4<x_2$，所以$x_1+x_2>x_3+x_4=2e$.

下面再证$x_1+x_2<e^2$. ……8分

由于$0<x_1<e<x_2$，故有$\ln x_1<1$，$x_1\ln x_1<x_1$.

因此$2x_1-x_1\ln x_1>x_1$.

而$2x_1-x_1\ln x_1=2x_2-x_2\ln x_2=1$，所以$2x_2-x_2\ln x_2>x_1$，故有$x_1+x_2<3x_2-x_2\ln x_2$.

构造函数$\varphi(x)=3x-x\ln x$，$x>e$，$\varphi'(x)=2-\ln x$，令$\varphi'(x)=0$，$x=e^2$，$\varphi(x)$在(e,e^2)内单调递增，在$(e^2,+\infty)$上单调递减，从而有$x_1+x_2<\varphi_{max}(x)=\varphi(e^2)=e^2$.

综上可知$2e<x_1+x_2<e^2$. ……12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。