

2023 年 7 月济南市高二期末考试

数学试题

本试卷共 6 页, 22 题, 全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \ln x - 2x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
2. 为弘扬中华优秀传统文化, 济南市公开招募“泉润非遗”志愿者, 现从所有报名的志愿者中, 随机选取 300 人进行调查, 其中青年人、中年人、老年人三个年龄段的比例饼状图如图 1 所示, 各年龄段志愿者的性别百分比等高堆积条形图如图 2 所示, 则下列关于样本数据的分析正确的是

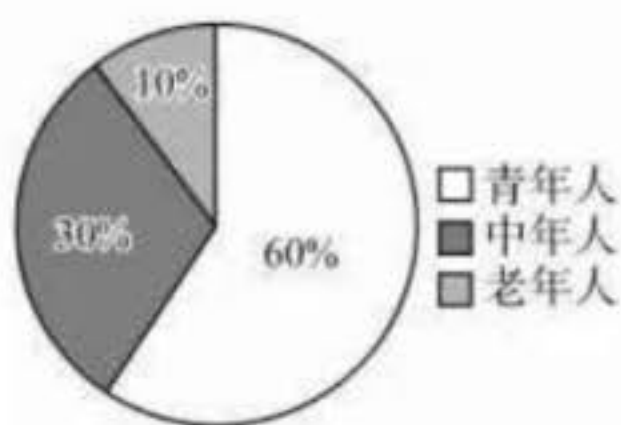


图1

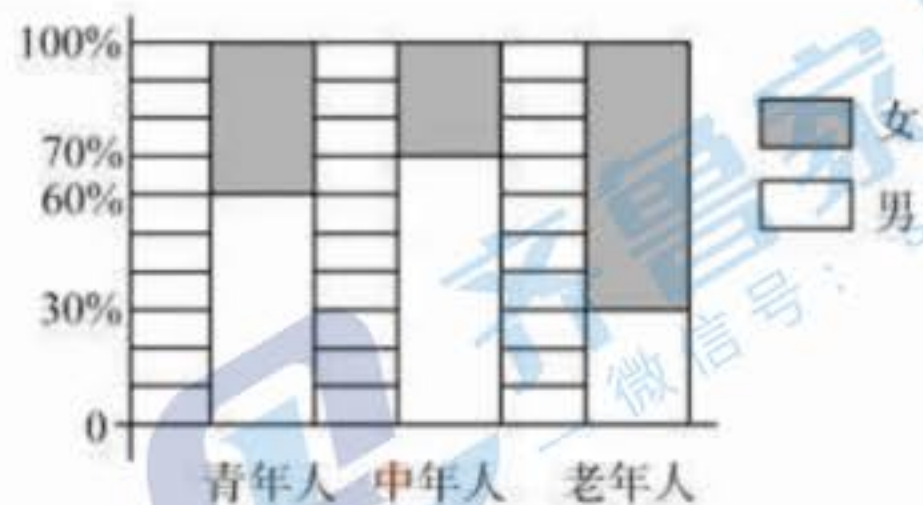


图2

- A. 老年男性志愿者人数为 90
- B. 青年女性志愿者人数为 72
- C. 老年女性志愿者人数大于中年女性志愿者人数
- D. 中年男性志愿者人数大于青年男性志愿者人数

3. 一个火车站有 8 股岔道, 如果每股道只能停放 1 列火车, 现要停放 4 列不同的火车, 则不同的停放方法数为

- A. 70 B. 256 C. 1680 D. 4096

4. 袋子里有 6 个大小相同的球, 其中 2 个黑球, 4 个白球, 有放回的取 3 次, 每次随机取 1 个, 设此过程中取到黑球的次数为 ξ , 则 $P(\xi=1) =$

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{3}{5}$

5. 已知 $(x+m)^5 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_5(x+1)^5$, 且 $\sum_{i=0}^5 a_i = 32$, 则实数 $m =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 若 $f'(x) + f(x) > 0$, $f(1) = \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln x) < \frac{1}{x}$ 的解集是

- A. $(0, 1)$ B. $(0, e)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(e, +\infty)$

7. 将三项式展开, 得到下列等式:

$$(x^2 + x + 1)^0 = 1$$

$$(x^2 + x + 1)^1 = x^2 + x + 1$$

$$(x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$(x^2 + x + 1)^3 = x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$$

.....

观察多项式系数之间的关系, 可以仿照杨辉三角构造如下所示的广义杨辉三角:

第 0 行

1

第 1 行

1 1 1

第 2 行

1 2 3 2 1

第 3 行

1 3 6 7 6 3 1

第 4 行

1 4 10 16 19 16 10 4 1

.....

若关于 x 的多项式 $(x^2 + ax - 3)(x^2 + x + 1)^5$ 的展开式中, x^8 的系数为 30, 则实数 $a =$

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

8. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + (e^{2x+2} - 2a)^2$, 若存在 x_0 , 使得 $f(x_0) \leq \frac{9}{5}$ 成立, 则 $\frac{x_0}{a} =$

- A. 2 B. 5 C. -2 D. -5

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合

题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x - 2$ ，则

A. $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 有两个极值点

C. $f(x)$ 有三个零点

D. 直线 $y = -4$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

10. 已知离散型随机变量 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$2t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}t$

则下列说法正确的是

A. $t = 1$ 或 $-\frac{1}{2}$

B. $E(X) = \frac{1}{8}$

C. $D(X) = \frac{55}{64}$

D. $D(8X + 9) = 64$

11. 为调查某地区植被覆盖面积 x (单位：公顷) 和野生动物数量 y 的关系，某研究小组将该地区等面积划分为 200 个区块，从中随机抽取 20 个区块，得到样本数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$ ，经

计算得： $\sum_{i=1}^{20} x_i = 60$ ， $\sum_{i=1}^{20} y_i = 1200$ ， $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 80$ ， $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 640$ 。该小

组利用这组数据分别建立了 y 关于 x 的线性回归方程 $l_1: \hat{y} = \hat{b}_1 x + \hat{a}_1$ 和 x 关于 y 的线性回归方程 $l_2: \hat{x} = \hat{b}_2 y + \hat{a}_2$ ，并把这两条拟合直线画在同一平面直角坐标系 xOy 下，横坐标 x ，纵坐标 y 的意义与植被覆盖面积 x 和野生动物数量 y 一致，则下列说法正确的是

A. $\hat{b}_1 = 8$

B. $\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 > 1$

C. l_1 经过点 $(3, 60)$

D. l_2 经过点 $(3, 60)$

附： y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ ， $r =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

12. 记两个函数 $f(x) = A \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ， $g(x) = x^\alpha$ 的图象的公共点个数是

$\varphi(A, \alpha)$ ，则

A. $\varphi(1, -1) = 1$

B. $\varphi(1, 1) = 1$

C. $\varphi(1, 2) = 1$

D. $\varphi(2, \frac{1}{2}) = 2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $A_n^2 = 90$ ，则 C_{n+2}^n 的值为_____.

14. 已知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，若 $P(X < 2) = 0.2$ ， $P(X < 3) = 0.5$ ，则 $P(X < 4)$ 的值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = x(\ln x + a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，则 a 的最小值为_____.

16. 为研究某新型番茄品种，科学家对大量该品种果实颜色进行了统计，发现果皮为黄色的番茄约占 $\frac{3}{8}$ ，果皮为黄色的番茄中，果肉为红色的约占 $\frac{8}{15}$ ；果肉不是红色的番茄中，果皮为黄色的约占 $\frac{7}{30}$ ，根据上述数据，估计该新型番茄果肉为红色的概率值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

2023 年 5 月 30 日，神舟十六号载人飞船发射升空，备受关注的“天宫课堂”将继续授课。为了解学生对“天宫课堂”的喜爱程度，某学校从全校学生中随机抽取 200 名学生进行问卷调查，以下是调查的部分数据：

	喜欢天宫课堂	不喜欢天宫课堂	合计
男生	75		
女生		45	
合计			200

已知从这 200 名学生中随机抽取 1 人，抽到喜欢“天宫课堂”的学生的概率为 $\frac{13}{20}$ 。

(1) 请将上面的 2×2 列联表补充完整：

(2) 根据以上数据，依据小概率值 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验，能否认为该校学生是否喜欢“天宫课堂”与性别有关联？

附：

α	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

参考公式： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$ 。

18.(12 分)

已知 $2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 2^3C_n^3 + \cdots + 2^nC_n^n = 728$.

(1)求 n 的值;

(2)求 $(x + \frac{1}{2\sqrt{x}})^n$ 的二项展开式中的常数项.

19.(12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + a\ln x$.

(1)若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值,求实数 a 的值;

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性.

20.(12 分)

某学校举办知识竞赛,规则是:比赛共三轮,每名选手只有通过上一轮才能进入下一轮,每轮比赛有两次挑战机会,若第一次挑战成功则直接进入下一轮,第一次不成功可以再挑战一次,若成功同样进入下一轮,两次均未成功,选手比赛终止.已知每次挑战是否成功相互独立.

(1)若选手甲第一轮每次挑战成功的概率为 $\frac{4}{5}$,第二轮每次挑战成功的概率为 $\frac{3}{4}$,求选手甲可以进入第三轮的概率;

(2)已知共有 2000 名选手参加竞赛,竞赛采用计分制,选手得分 $X \sim N(212, \sigma^2)$,其中 270 分以上的选手有 46 名,学校决定对得分高的前 317 名选手进行表彰,若选手乙的得分为 231 分,问乙能否获得表彰.

附:若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.683$;

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.954$; $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$.

21.(12 分)

为提高科技原创能力,抢占科技创新制高点,某企业锐意创新,开发了一款新产品,并进行大量试产.

(1)现从试产的新产品中取出 6 件产品,其中恰有 2 件次品,但不能确定哪 2 件是次品,需对 6 件产品依次进行检验,每次检验后不放回,当能确定哪 2 件是次品时即终止检验,记终止时一共检验了 X 次,求随机变量 X 的分布列与期望;

(2)设每件新产品为次品的概率都为 p ($0 < p < 1$),且各件新产品是否为次品相互独立.记“从试产的新产品中随机抽取 50 件,其中恰有 2 件次品”的概率为 $f(p)$,问 p 取何值时, $f(p)$ 最大.

22.(12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - 1 + ax^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1)若 $f(x)$ 存在唯一的极值点,求 a 的取值范围;

(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ,求证: $x_1^2 + x_2^2 > 2(a+1) + e$.