高三数学考试(理科)

(考试时间:120 分钟　试卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid -12<4x<8\}$,$B=\{x\mid \frac{1}{x}<1\}$,则 $A\cap B=$

A. $(-3,0)$　　B. $(-3,2)$

C. $(1,2)$　　D. $(-3,0)\cup(1,2)$

2. 青少年近视情况日益严重,为了解情况,现从某校抽取部分学生,用对数视力表检查视力情况,A 组和 B 组数据结果用茎叶图记录(如图所示),其中茎表示个位数,叶表示十分位数. 对于这两组数据,下列结论正确的是

A. 两组数据的中位数相等

B. 两组数据的极差相等

C. 两组数据的平均数相等

D. 两组数据的众数相等

A		B
2 1 0	5	0 2
8 7 6 6 6 4 0	4	2 4 4 5 8 8 8 9

3. 在四面体 $ABCD$ 中,$\triangle BCD$ 为正三角形,AB 与平面 BCD 不垂直,则

A. AB 与 CD 可能垂直　　B. A 在平面 BCD 内的射影可能是 B

C. AB 与 CD 不可能垂直　　D. 平面 ABC 与平面 BCD 不可能垂直

4. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,则下列函数是奇函数的是

A. $y=f(2^x+2^{-x})$　　B. $y=f(2^x-x)$

C. $y=f(2^x-2^{-x})$　　D. $y=f(2^x+x)$

5. 设圆 $O:x^2+y^2=4$ 与 y 轴交于 A,B 两点(A 在 B 的上方),过 B 作圆 O 的切线 l,若动点 P 到 A 的距离等于 P 到 l 的距离,则动点 P 的轨迹方程为

A. $x^2=8y$　　B. $x^2=16y$　　C. $y^2=8x$　　D. $y^2=16x$

6. 已知随机变量 X 的分布列为

X	t	$2-t$	t^2	6
P	0.3	0.2	0.2	0.3

若 t 在 $[-1,2]$ 内变化,当 X 的数学期望取得最小值时,$t=$

A. -0.15　　B. -0.25　　C. 0.15　　D. 0.25

7. 若一个等比数列的首项为 $\frac{1}{4}$,公比为 2,S 是该等比数列前 10 项之和,S' 是该等比数列前 10 项的倒数之和,则 $\frac{S}{S'}=$

A. 16　　B. 32　　C. 64　　D. 128

8. 已知函数 $f(x)=x^4-x$ 的图象在原点 O 处的切线与在点 $A(1,0)$ 处的切线的交点为 P,则 $\tan\angle OPA=$

A. 2　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{9}{2}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,则“$(\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C)(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A)(\sin^2C+\sin^2A-\sin^2B)>0$”是“$\triangle ABC$ 为锐角三角形”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 已知 A,B,C 为椭圆 D 上的三点,AB 为长轴,$AB=7$,$AC=3$,$\angle BAC=60°$,则 D 的离心率是

A. $\frac{2}{11}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{11}$　　C. $\frac{3}{11}$　　D. $\frac{\sqrt{22}}{11}$

11. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$,$g(x)$ 的导函数都存在,且 $f(x)>xf'(x)-x^2g'(x)$,则必有

A. $2g(2)+2f(1)>f(2)+2g(1)$　　B. $2g(2)+2f(1)<f(2)+2g(1)$

C. $4g(2)+2f(1)>f(2)+4g(1)$　　D. $4g(2)+2f(1)<f(2)+4g(1)$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 m 项,$a_1=111$,$a_2=217$,且当 $n\in\mathbf{N}^*$,$3\leqslant n\leqslant m$ 时,$a_n=a_{n-2}-\frac{n-p}{a_{n-1}}$. 当项数 m 的最大值为 220 时,常数 p 的值为

A. $\frac{109}{110}$　　B. $\frac{108}{109}$　　C. $\frac{110}{109}$　　D. $\frac{109}{108}$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 写出一个满足下列两个条件的复数:$z=$____▲____.

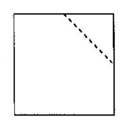
①z^2 的实部为 5;②z 的虚部不为 0.

14. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}$ 垂直,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$____▲____.

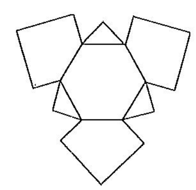
15. 右图为一个开关阵列,每个开关只有“开”和“关”两种状态,按其中一个开关 1 次,将导致自身和所有相邻(上、下相邻或左、右相邻)的开关改变状态. 若从这十六个开关中随机选两个不同的开关先后各按 1 次(例如:先按(1,1),再按(4,4)),则(2,3)和(4,1)的最终状态都未发生改变的概率为____▲____.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

16. 将 3 个 6 cm×6 cm 的正方形都沿其中的一对邻边的中点剪开,每个正方形均分成两个部分,如图(1)所示,将这 6 个部分接于一个边长为 $3\sqrt{2}$ cm 的正六边形上,如图(2)所示. 若该平面图沿着正六边形的边折起,围成一个七面体,则该七面体的体积为____▲____cm^3;若在该七面体内放置一个小球,则小球半径的最大值为____▲____cm.(本题第一空 2 分,第二空 3 分)



图(1)



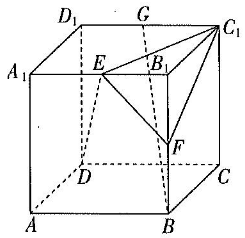
图(2)

三、解答题:共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.(12 分)

如图,在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,G 分别为 A_1B_1,BB_1,C_1D_1 的中点.



(1)过 BG 作该正方体的截面,使得该截面与平面 C_1EF 平行,写出作法,并说明理由;

(2)求直线 DE 与平面 C_1EF 所成角的正弦值.

18.(12 分)

已知函数 $f(x)=4\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$在$[\frac{\pi}{6},\pi]$上单调递减.

(1)求 ω 的最大值;

(2)若 $f(x)$的图象关于点$(\frac{3\pi}{2},0)$中心对称,且 $f(x)$在$[-\frac{9\pi}{20},m]$上的值域为$[-2,4]$,求 m 的取值范围.

19.(12 分)

2022 年 12 月份以来,全国多个地区纷纷采取不同的形式发放多轮消费券,助力消费复苏.记发放的消费券额度为 x(百万元),带动的消费为 y(百万元).某省随机抽查的一些城市的数据如下表所示.

x	3	3	4	5	5	6	6	8
y	10	12	13	18	19	21	24	27

(1)根据表中的数据,请用相关系数说明 y 与 x 有很强的线性相关关系,并求出 y 关于 x 的线性回归方程.

(2)(i)若该省 A 城市在 2023 年 2 月份准备发放一轮额度为 10 百万元的消费券,利用(1)中求得的线性回归方程,预计可以带动多少消费?

(ii)当实际值与估计值的差的绝对值与估计值的比值不超过 10%时,认为发放的该轮消费券助力消费复苏是理想的.若该省 A 城市 2 月份发放额度为 10 百万元的消费券后,经过一个月的统计,发现实际带动的消费为 30 百万元,请问发放的该轮消费券助力消费复苏是否理想?若不理想,请分析可能存在的原因.

参考公式:$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

当$|r|>0.75$时,两个变量之间具有很强的线性相关关系.

参考数据:$\sqrt{35}\approx5.9$.

20.(12 分)

已知函数 $f(x)=3x^4+\frac{4}{x^3}(x>0)$.

(1)求 $f(x)$的最小值.

(2)若 $f(x_1)=f(x_2)$,且 $x_1<x_2$.证明:

(i)$x_1^3+(2-x_1)^3<x_1^4+(2-x_1)^4$;

(ii)$x_1+x_2>2$.

21.(12 分)

已知等轴双曲线 C 的中心为坐标原点 O,焦点在 x 轴上,且焦点到渐近线的距离为$\sqrt{2}$.

(1)求 C 的方程;

(2)若 C 上有两点 P,Q 满足$\angle POQ=45°$,证明:$\frac{1}{|OP|^4}+\frac{1}{|OQ|^4}$是定值.

(二)选考题:共 10 分.请考生从第 22,23 两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一个题目计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在极坐标系中,圆 C 的圆心在极轴上,半径为 2,且圆 C 经过极点.

(1)求圆 C 的极坐标方程;

(2)若 P 为圆 C 上的动点,过 P 作直线 $\rho\sin\theta=-3$,$\rho\cos\theta=-1$ 的垂线,垂足分别为 A,B,求$\triangle PAB$ 面积的最大值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|(-1<a<b)$.

(1)若 $a=1,b=2$,证明:$f(x)\geqslant\sin x$.

(2)记集合 $A=\{x|f(x)<a+b+2\}$,$B=\{x||2x-a-b|<a+b+2\}$,试判断 A 与 B 的关系,并说明理由.