高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=\frac{3+2i}{1-i}$（i 为虚数单位），则 $|z+2i|=$

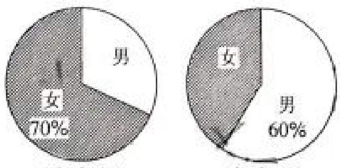
A. [illegible]　　B. [illegible]　　C. [illegible]　　D. [illegible]

2. 已知全集 U= R，集合 A [illegible]，则 [illegible]

A. [illegible]　　B. [illegible]

C. [illegible]　　D. [illegible]

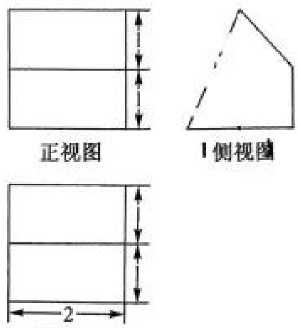
3. 某中学有高中生 [illegible] 人，初中生 [illegible] 人，男、女生所占的比例如下图所示。为了解学生的学习情况，用分层抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为 n 的样本，已知从高中生中抽取女生 21 人，则从初中生中抽取的男生人数是



（高中生）　（初中生）

A. 12　　B. 15　　C. 20　　D. 21

4. 已知某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则该几何体的体积是



A. 3 cm^3

B. 5 cm^3

C. 4 cm^3

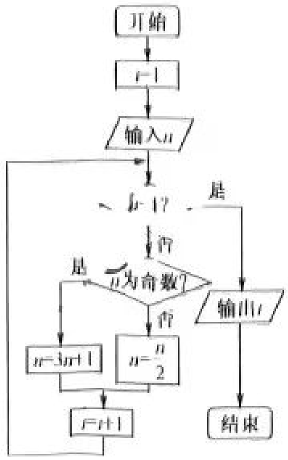
D. 6 cm^3

5. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_4a_8=2a_{10}$，则 S_3 的最小值为

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 6

6. 20世纪70年代，流行一种游戏——角谷猜想，规则如下：任意写出一个自然数 n，按照以下的规律进行变换：如果 n 是个奇数，则下一步变成 $3n+1$；如果 n 是个偶数，则下一步变成 $\frac{n}{2}$，这种游戏的魅力在于无论你写出一个多么庞大的数字，最后必然会落在谷底，更准确地说是落入底部的4—2—1循环，而永远也跳不出这个圈子，下列程序框图就是根据这个游戏而设计的，如果输出的 i 值为6，则输入的 n 值为



A. 5　　　　B. 16

C. 5或32　　　　D. [illegible]

7. 若 [illegible] 的展开式中 [illegible] 的系数为80，其中 n 为正整数，则 [illegible] 的展开式中各项系数的绝对值之和为

A. 32　　　　B. 81　　　　C. [illegible]　　　　D. [illegible]

8. 已知点 P 是曲线 [illegible] 上任意一点，则点 P 到直线 [illegible] 的距离的最小值是

A. [illegible]　　　　B. [illegible]　　　　C. [illegible]　　　　D. [illegible]

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，直线 $y=kx$ 与 C 交于 A,B 两点（其中点 A 位于第一象限），$|AB|=2|OF|$，O 为坐标原点，且 $\triangle FAB$ 的面积为 $4a^2$，则 C 的离心率是

A. $\sqrt{3}$　　　　B. 2　　　　C. [illegible]　　　　D. 3

10. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{5}{6}\pi\right)(\omega>0)$，若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上没有零点，则 ω 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{2}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{8}{9}\right]$　　　　B. $\left[\frac{2}{3},\frac{8}{9}\right]$

C. $\left(0,\frac{2}{9}\right]$　　　　D. $(0,1]$

11. 已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点是 F，过 F 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，则 $(|AF|+1)\cdot|BF|$ 的最小值是

A. $3\sqrt{2}+2$　　　　B. $2\sqrt{3}+2$　　　　C. $2\sqrt{2}+3$　　　　D. $4\sqrt{2}+1$

12. 设 $a=\frac{\sin 1}{3}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$，$c=\frac{\pi}{9}-\frac{2-\sqrt{3}}{6}$，则

A. $a>b>c$　　　　B. $c>a>b$　　　　C. $a>c>b$　　　　D. $c>b>a$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,m)$，若 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 m ______

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_8=-3S_4\neq 0$，则 $\frac{S_4}{S_{12}}$ 的值为

15. 已知等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边 $BC=2$，沿斜边的高线 AD 将 $\triangle ADC$ 折起，使二面角 $B-AD-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为______ 来源：高三答案公众号

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)-f(x)>0$，且 $f(x+1)=f([illegible]-x)$，$f(0)=e$，则不等式 $f(x)\geq e^{x+1}$ 的解集是______

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（本小题满分12分）

已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边，$c(1+\cos B)=\sqrt{3}b\sin C$.

(1)求角 B 的大小；

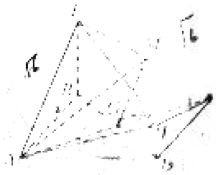
(2)若 $b=2$，$a+c=4$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（本小题满分12分）

如图，菱形 $ABCD$ 与四边形 $BDEF$ 相交于 BD，$\angle ABC=120°$，$BF\perp$ 平面 $ABCD$，$DE\parallel BF$，$BF=2DE$，$AF\perp FC$，M 为 CF 的中点，$AC\cap BD=G$.

(1)求证：$GM\parallel$ 平面 CDE；

(2)求直线 AM 与平面 ACE 所成角的正弦值.



19.（本小题满分12分）

某工厂的污水处理程序如下：原始污水必先经过 A 系统处理，处理后的污水（A 级水）达到环保标准（简称达标）的概率为 $p(0\leq p<1)$. 经化验检测，若确认达标便可直接排放；若不达标则必须进行 B 系统处理后直接排放. 某厂现有4个标准水量的 A 级水池，分别取样、检测. 多个污水样本检测时，既可以逐个化验，也可以将若干个样本混合在一起化验. 混合样本中只要有样本不达标，则混合样本的化验结果必不达标. 若混合样本不达标，则该组中各个样本必须再逐个化验；若混合样本达标，则原水池的污水直接排放. 现有以下四种方案：

方案一，逐个化验；

方案二，平均分成两组化验；

方案三，三个样本混在一起化验，剩下的一个单独化验；

方案四，混在一起化验.

化验次数的期望值越小，则方案越"优".

(1)若 $p=\frac{2}{\sqrt{5}}$，求2个 A 级水样本混合化验结果不达标的概率；

(2)若 $p=\frac{2}{\sqrt{5}}$，现有4个 A 级水样本需要化验，请问：方案一、二、四中哪个最"优"？

(3)若"方案三"比"方案四"更"优"，求 p 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$,$F_2$,上顶点为$M$,若直线$MF_1$的斜率为1,与椭圆的另一个交点为$N$,$\triangle F_2MN$的周长为$4\sqrt{2}$.

(1)求椭圆的标准方程;

(2)过点F_1的直线l(直线l斜率不为1)与椭圆交于P,Q两点,点P在点Q的上方,若$S_{\triangle F_1NQ}=\frac{2}{3}S_{\triangle F_1MP}$,求直线$l$的斜率.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-ax-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)若不等式$f(x)\geqslant 0$在$x\in[0,+\infty)$上恒成立,求实数a的取值范围;

(2)若$x>0$,求证:$\left(e^x-\frac{1}{2}x^2+1\right)\ln(x+1)>2x$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系xOy中,曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\y=2+\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数).以$O$为极点,$x$轴轴为极轴建立极坐标系.

(1)求C的普通方程;

(2)已知点P的直角坐标为$(-1,2)$,过点P作C的切线,求切线的极坐标方程.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知函数$f(x)=|x+a|+|x-a|(a\in\mathbf{R})$.

(1)若$a=2$,求不等式$f(x)\geqslant 9$的解集;

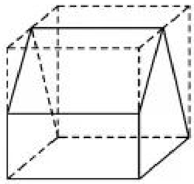
(2)若$\forall x\in\mathbf{R}$,不等式$f(x)\geqslant a^2-2a$恒成立,求实数a的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由 $z=\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$，所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$，$|\bar{z}+2i|=\left|\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i+2i\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A. 来源：高三答案公众号

2. B　因为 $A=\left\{x\left|\frac{x-4}{x+1}>0\right.\right\}=(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$，$B=\{x|y=\ln(4-x^2)\}=(-2,2)$，又 $U=\mathbf{R}$，所以 $\complement_U A=[-1,4]$，所以 $(\complement_U A)\cap B=[-1,2)$. 故选 B.

3. A　因为分层抽样的抽取比例为 $\frac{21}{3\ 000\times0.7}=\frac{1}{100}$，所以初中生中抽取的男生人数是 $\frac{2\ 000\times0.6}{100}=12$. 故选 A.



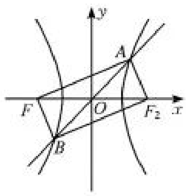
4. B　该几何体是棱长为 2 的正方体截去两个小三棱柱得到的四棱柱，其体积是 $2\times\left(4-\frac{1}{2}-1\right)=5\ \text{cm}^3$. 故选 B.

5. D　设 $\{a_n\}$ 首项为 a_1，公比为 q，$\because a_4\cdot a_8=2a_{10}$，$\therefore a_1q^3\cdot a_1q^7=2a_1q^9$，$\therefore a_1q=2$，$S_3=a_1+a_1q+a_1q^2=2+a_1+2q\geqslant2+2\sqrt{2a_1q}=6$，即 S_3 最小值为 6. 故选 D.

6. C　若 $n=5$，执行程序框图，$n=16$，$i=2$；$n=8$，$i=3$；$n=4$，$i=4$；$n=2$，$i=5$；$n=1$，$i=6$，结束循环，输出 $i=6$；$n=32$ 时，执行程序框图，$n=16$，$i=2$；$n=8$，$i=3$；$n=4$，$i=4$；$n=2$，$i=5$；$n=1$，$i=6$，结束循环，输出 $i=6$. 又 $n=4$ 时，输出 $i=3$，不合题意，所以 $n=5$ 或 $n=32$. 故选 C.

7. C　$\frac{(1-2x)^n}{x}$ 的展开式中 x^2 的系数即为 $(1-2x)^n$ 的展开式中 x^3 的系数，故 $C_n^3(-2)^3=-8C_n^3=-80$，$C_n^3=10$，则 $n=5$. $\frac{(1-2x)^5}{x}$ 的展开式中各项系数的绝对值之和即为 $\frac{(1+2x)^5}{x}$ 的展开式中各项的系数之和，故 $\frac{(1-2x)^5}{x}$ 的展开式中各项系数的绝对值之和为 $\frac{(1+2)^5}{1}=243$. 故选 C.

8. D　由题意知，曲线 $y=x^2-3\ln x$ 在点 P 的切线与直线 $2x+2y+3=0$ 平行时，点 P 到直线 $2x+2y+3=0$ 的距离最小. 设 $P(x_0,y_0)$，则 $y'=2x-\frac{3}{x}$，则 $2x_0-\frac{3}{x_0}=-1$，解得 $x_0=1$，所以 $P(1,1)$，点 P 到直线 $2x+2y+3=0$ 的距离 $d=\frac{|2+2+3|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$. 故选 D.



9. C　如图，设 C 的右焦点为 F_2，连接 AF_2，BF_2，因为 $|AB|=2|OF|$，所以 $AF\perp BF$，由图形的对称性知 $AFBF_2$ 为矩形，则有 $|AF|-|AF_2|=2a$，$|AF|\cdot|AF_2|=8a^2$，所以 $|AF|=4a$，$|AF_2|=2a$. 在 $\text{Rt}\triangle AFF_2$ 中，$(4a)^2+(2a)^2=(2c)^2$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$. 故选 C.

10. A　$f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{5}{6}\pi\right)$，由 $f(x)=0$，得 $\omega x-\frac{5}{6}\pi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\omega x=k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{1}{\omega}\left(k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\begin{cases}\frac{1}{\omega}\left(k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\leqslant\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\ \frac{1}{\omega}\left[(k+1)\pi+\frac{4\pi}{3}\right]\geqslant\frac{3}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$ 又 $\omega>0$，所以 $2k+\frac{8}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{2(k+1)}{3}+\frac{8}{9}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-2$ 时，$0<\omega\leqslant\frac{2}{9}$，当

$k=-1$ 时，$\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{9}$，故 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{2}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{8}{9}\right]$. 故选 A.

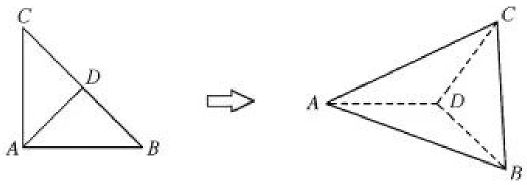
11. C　由题意知，$F(0,1)$，显然直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，所以 $x_1x_2=-4$，所以 $y_1y_2=\frac{x_1^2}{4}\cdot\frac{x_2^2}{4}=1$，所以 $(|AF|+1)\cdot|BF|=(y_1+1+1)(y_2+1)=y_1y_2+y_1+2y_2+2=y_1+2y_2+3\geqslant2\sqrt{y_1\cdot2y_2}+3=2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立. 故选 C.

12. B　令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $u(x)=x\cos x-\sin x$，则 $u'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，所以 $u(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $u(x)<u(0)=0$，所以 $f'(x)<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $f(1)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，即 $\frac{\sin 1}{1}>\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}$，即 $\frac{\sin 1}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$. 令 $g(x)=\sin x+x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，易得 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $g(1)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，即 $\sin 1+1<\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$，即 $\sin 1<\frac{\pi}{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{\sin 1}{3}<\frac{\pi}{9}-\frac{2-\sqrt{3}}{6}$，所以 [illegible]. 故选 B. 来源：高三答案公众号

13. $\frac{1}{3}$　因为 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,m)$，所以 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(2,1+3m)$，由 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，得 $-2+1+3m=0$，解得 $m=\frac{1}{3}$.

14. $-\frac{1}{12}$　因为 $S_8=S_4+S_4+4\times4d=2S_4+16d$，得 $-3S_4=2S_4+16d$，所以 $S_4=-\frac{16d}{5}$，所以 $S_{12}=S_8+S_4+4\times8d=3S_4+48d=\frac{192d}{5}$，则 $\frac{S_4}{S_{12}}=-\frac{16d}{5}\times\frac{5}{192d}=-\frac{1}{12}$.

15. $\frac{7\pi}{3}$　如图所示，



等腰直角△ABC 图形翻折后 $AD\perp CD$，$AD\perp BD$，且 $CD\cap BD=D$，可得 $AD\perp$ 面 BDC，故 $\angle CDB$ 是二面角 $B-AD-C$ 的平面角，即 $\angle CDB=\frac{\pi}{3}$，故△BCD 是边长为 1 的等边三角形，其外接圆半径满足 $\frac{1}{\sin 60^\circ}=2r$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 又因为 $AD=1$，故四面体 $ABCD$ 的外接球半径满足 $R^2=r^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{12}$，则其表面积为 $4\pi R^2=\frac{7\pi}{3}$.

16. $(-\infty,2)$　设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$\therefore g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. $\because f(x+1)=f(1-x)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，$\therefore f(2)=f(0)=e$，$\therefore g(2)=\frac{f(2)}{e^2}=\frac{1}{e}$. $\because f(x)>e^{x-1}$，$\therefore\frac{f(x)}{e^x}>\frac{1}{e}$，即 $g(x)>g(2)$，$\therefore x<2$，故不等式 $f(x)>e^{x-1}$ 的解集是 $(-\infty,2)$.

17. 解：(1) 因为 $c(1+\cos B)=\sqrt{3}b\sin C$，由正弦定理可得 $\sin C(1+\cos B)=\sqrt{3}\sin B\sin C$. ………………………………… 2 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $1+\cos B=\sqrt{3}\sin B$，得 $2\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

…… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………… 6 分

(2) 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=4^2-2ac-2ac\times\frac{1}{2}=16-3ac$， …………… 7 分

即 $2^2=16-3ac$，解得 $ac=4$. ……………………………………………………………………… 9 分

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 12 分

18. (1) 证明：取 BC 的中点 N，连接 GN，MN.

因为 G 为菱形对角线的交点，所以 G 为 AC 中点.

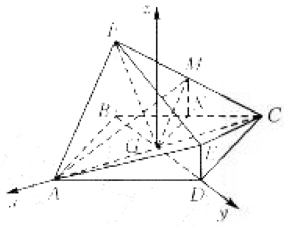
又 N 为 BC 中点，所以 $GN//CD$，又 $GN\not\subset$ 平面 CDE，$CD\subset$ 平面 CDE，所以 $GN//$ 平面 CDE.

又因为 M，N 分别为 FC，BC 的中点. ………………………………………………………………… 2 分

所以 $MN//FB$，又因为 $DE//BF$，所以 $DE//MN$，$MN\not\subset$ 平面 CDE，$DE\subset$ 平面 CDE，所以 $MN//$ 平面 CDE.

又 MN，$GN\subset$ 平面 MNG，$MN\cap GN=N$，所以平面 $GMN//$ 平面 CDE.

又 $GM\subset$ 平面 GMN，所以 $GM//$ 平面 CDE. ………………………………………… [illegible]分



(2) 解：连接 GF.

设菱形的边长 $AB=2$，则由 $\angle ABC=120°$，得 $GB=GD=1$，$GA=GC=\sqrt{3}$.

又因为 $AF\perp FC$，所以 $FG=GA=\sqrt{3}$.

则在直角 $\triangle GBF$ 中，$BF=\sqrt{2}$，所以 $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $BF\perp$ 平面 $ABCD$，$DE//BF$，得 $DE\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………… 6 分

以 G 为坐标原点，分别以 GA，GD 所在直线为 x 轴，y 轴，过点 G 与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 $G-xyz$，则 $G(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$E\left(0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$F(0,-1,\sqrt{2})$，$M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{GA}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{GE}=\left(0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. …………………………………………………… 8 分

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 ACE 的一个法向量，来源：高三答案公众号

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{GA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{GE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x=0,\\ y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$

令 $z=\sqrt{2}$，得 $y=-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,-1,\sqrt{2})$. …………………………………………………… 10 分

又 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AM},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AM}|\,|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\sqrt{1+2}\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

设直线 AM 与平面 ACE 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以直线 AM 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………… 12 分

19. 解：(1)该混合样本达标的概率是 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{5}$，

所以根据对立事件原理，不达标的概率为 $1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$. ………………………………………… 2 分

(2)方案一：逐个检测，检测次数为 4. 来源：高三答案公众号

方案二：由(1)知，每组两个样本检测时，若达标则检测次数为 1，概率为 $\dfrac{4}{5}$；若不达标则检测次数为 3，概率为 $\dfrac{1}{5}$. 设方案二的检测次数为 ξ_2，则 ξ_2 可取 2，4，6. 其分布列如下：

ξ_2	2	4	6
P	$\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^2$

可求得方案二的数学期望为 $E(\xi_2)=2\times\dfrac{16}{25}+4\times\dfrac{8}{25}+6\times\dfrac{1}{25}=\dfrac{70}{25}=\dfrac{14}{5}$. ………………………………………… 4 分

方案四：混在一起检测，设检测次数为 ξ_4，则 ξ_4 可取 1，5. 其分布列如下：

ξ_4	1	5
P	$\left(\frac{16}{25}\right)$	$1-\left(\frac{16}{25}\right)$

可求得方案四的数学期望为 $E(\xi_4)=1\times\dfrac{16}{25}+5\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{61}{25}$.

比较可得 $E(\xi_4)<E(\xi_2)<4$，故选择方案四最"优". ………………………………………… 6 分

(3)方案三：设方案三的化验次数为 η_3，则 η_3 可取 2，5. 其分布列如下：

η_3	2	5
P	p^3	$1-p^3$

可求得方案三的数学期望为 $E(\eta_3)=2\cdot p^3+5(1-p^3)=5-3p^3$； ………………………………………… 8 分

方案四：设方案四的化验次数为 η_4，则 η_4 可取 1，5. 其分布列如下：

η_4	1	5
P	p^4	$1-p^4$

可求得方案四的数学期望为 $E(\eta_4)=1\cdot p^4+5(1-p^4)=5-4p^4$. ………………………………………… 10 分

由题意得 $E(\eta_3)<E(\eta_4)$，即 $5-3p^3<5-4p^4$，解得 $p<\dfrac{3}{4}$.

故当 $0<p<\dfrac{3}{4}$ 时，方案三比方案四更"优". ……………………………………

20. 解:(1)因为$\triangle F_2MN$的周长为$4\sqrt{2}$,所以$4a=4\sqrt{2}$,即$a=\sqrt{2}$. ……………………………… 2分

由直线MF_1的斜率为1,得$\frac{b}{c}=1$, ……………………………… 3分

因为$a^2=b^2+c^2$,所以$b=1,c=1$. ……………………………… 4分

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………… 5分

(2)由题意可得直线MF_1方程为$y=x+1$,联立$\begin{cases} y=x+1, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$得$N(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$,来源:高三答案公众号

所以$\frac{|NF_1|}{|MF_1|}=\frac{1}{3}$. ……………………………… 7分

因为$S_{\triangle F_1NQ}=\frac{2}{3}S_{\triangle F_1MP}$,即$\frac{1}{2}|NF_1|\cdot|QF_1|\sin\angle QF_1N=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}|MF_1|\cdot|PF_1|\sin\angle PF_1M)$,

所以$|QF_1|=2|PF_1|$. ……………………………… 8分

当直线l的斜率为0时,不符合题意,

故设直线l的方程为$x=my-1$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,由点P在点Q的上方,则$y_2=-2y_1$.

联立$\begin{cases} x=my-1, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$得$(m^2+2)y^2-2my-1=0$,所以$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}, \\ y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}, \end{cases}$ ……………………………… 10分

消去y_1得$\begin{cases} -y_1=\frac{2m}{m^2+2}, \\ 2y_1^2=\frac{1}{m^2+2}, \end{cases}$所以$\frac{8m^2}{(m^2+2)^2}=\frac{1}{m^2+2}$,得$m^2=\frac{2}{7}$,$m=\pm\frac{\sqrt{14}}{7}$.

又由点P在点Q的上方知$m=\frac{\sqrt{14}}{7}$不符合题意,所以$m=-\frac{\sqrt{14}}{7}$. ……………………………… 11分

故直线l的斜率为$\frac{1}{m}=-\frac{\sqrt{14}}{2}$. ……………………………… 12分

21. (1)解:由题意知$f'(x)=e^x-x-a$,$x\in[0,+\infty)$,令$u(x)=f'(x)$,则$u'(x)=e^x-1$,则$u'(x)\geqslant 0$在$[0,+\infty)$上恒成立,所以$u(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,即$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增. ……………………………… 1分

当$a\leqslant 1$时,$f'(x)\geqslant f'(0)=1-a\geqslant 0$在$[0,+\infty)$上恒成立,所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$f(x)\geqslant f(0)=0$,符合题意; ……………………………… 3分

当$a>1$时,$f'(0)=1-a<0$.

令$h(x)=e^x-2x$,则$h'(x)=e^x-2$,所以$h(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减,在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增,所以$h(x)\geqslant h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$.

所以$f'(a)=e^a-a-a=e^a-2a>0$,又$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$\exists x_0\in(0,a)$,使得$f'(x_0)=0$,所以$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增,所以$f(x_0)<f(0)=0$,不符合题意.

………………………………

综上所述,实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. ………………………………………………………… 6分

(2)证明:由(1)得,当 $a=1,x>0$ 时,$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$,即 $e^x-\frac{x^2}{2}+1>x+2$, ……………………………… 7分

要证不等式 $\left(e^x-\frac{1}{2}x^2+1\right)\ln(x+1)>2x$,只需证明 $e^x-\frac{1}{2}x^2+1>\frac{2x}{\ln(x+1)}$,只需证明 $x+2>\frac{2x}{\ln(x+1)}$.

即只需证 $\ln(x+1)>\frac{2x}{2+x}$, ………………………………………………………………………… 10分

设 $F(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}(x>0)$,则 $F'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$,

当 $x>0$ 时,$F'(x)>0$ 恒成立,故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,来源:高三答案公众号

又 $F(0)=0$,所以 $F(x)>0$ 恒成立.所以原不等式成立. ………………………………………………… 12分

22. 解:(1)曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\y=2+\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数),

所以 C 的普通方程是 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$. ……………………………………………………………… 3分

(2)由题意,切线的斜率一定存在,设切线方程为 $y-2=k(x+1)$,即 $kx-y+k+2=0$,

所以 $\frac{|k-2+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$. ……………………………………………………………………………… 6分

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………………………… 7分

所以切线方程是 $\sqrt{3}x-3y+\sqrt{3}+6=0$ 或 $\sqrt{3}x+3y+\sqrt{3}-6=0$. …………………………………… 8分

将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入,得 $\sqrt{3}\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta+\sqrt{3}+6=0$ 或 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+3\rho\sin\theta+\sqrt{3}-6=0$,

化简得 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ 或 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}$. ……………………… 10分

23. 解:(1)若 $a=2,f(x)=|x+2|+|x-2|$. ……………………………………………………………… 1分

当 $x\leqslant-2$ 时,$f(x)=-x-2+2-x=-2x\geqslant9$,解得 $x\leqslant-\frac{9}{2}$,所以 $x\leqslant-\frac{9}{2}$; ……………………… 2分

当 $-2<x<2$ 时,$f(x)=x+2+2-x=4$,无解;………………………………………………………………… 3分

当 $x\geqslant2$ 时,$f(x)=x+2+x-2=2x\geqslant9$,解得 $x\geqslant\frac{9}{2}$,所以 $x\geqslant\frac{9}{2}$. ………………………………… 4分

综上,不等式 $f(x)\geqslant9$ 的解集是 $\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right]\cup\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$. …………………………………… 5分

(2)因为 $f(x)=|x+a|+|x-a|\geqslant|(x+a)-(x-a)|=2|a|$, ……………………………………………… 6分

若 $\forall x\in\mathbf{R}$,不等式 $f(x)\geqslant a^2-2a$ 恒成立,只需 $2|a|\geqslant a^2-2a$. ……………………………………… 7分

当 $a\geqslant0$ 时,$2a\geqslant a^2-2a$,解得 $0\leqslant a\leqslant4$; ………………………………………………………………… 8分

当 $a<0$ 时,$-2a\geqslant a^2-2a$,此时满足条件的 a 不存在. ……………………………………………… 9分

综上,实数 a 的取值范围是 $[0,4]$. …………………………………………………………………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。