

江淮十校 2022 届高三第三次联考

数学试题参考答案(理科)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	C	B	B	B	D	A	B	C	C	A	D

1.【答案】C

【详解】 $A = \{x | x^2 \leq 4\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 在集合 B 中, 由 $x-1 \in A$, 得 $-2 \leq x-1 \leq 2$, 即 $-1 \leq x \leq 3$, 又 $x \in \mathbb{N}^+$, 所以 $x = 1, 2, 3$, 即 $B = \{1, 2, 3\}$. 故选 C.

2.【答案】C

【详解】由题得 $z \cdot \left(\frac{3}{2} + i\right) = |z|^2$, 又 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, 所以 $\bar{z} = \frac{3}{2} + i$, 则 $z = \frac{3}{2} - i$, 故选 C.

3.【答案】B

【详解】由题设, 从第 5 行第 6 列开始向右读取数据, 依次为 253, 313, 457, 860, 736, 253, 007, 328, 623, ... 因为将 800 个零件进行编号 001, 002, ..., 799, 800, 所以前 6 个编号分别为 253, 313, 457, 736, 007, 328, 则第 6 个样本编号是 328. 故选 B.

4.【答案】B

【详解】由题得 $f(x) = \frac{\sin x}{\ln(x^2 + 1)}$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 又 $f(-x) = -\frac{\sin x}{\ln(x^2 + 1)} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点中心对称, 排除 C; 因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\ln\left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right)} > 0$, 排除 A, D, 故选 B.

5.【答案】B

【详解】记点 O 到 AB, BC, CA 的距离分别为 h_c, h_a, h_b , 则 $S_c = \frac{1}{2}c \cdot h_c, S_a = \frac{1}{2}a \cdot h_a, S_b = \frac{1}{2}b \cdot h_b$, 因为 $S_a \cdot \overrightarrow{OA} + S_b \cdot \overrightarrow{OB} + S_c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\frac{1}{2}a \cdot h_a \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}b \cdot h_b \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}c \cdot h_c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 又 $a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 所以 $h_a = h_b = h_c$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 故选 B.

6.【答案】D

【详解】不妨设 $l: bx + 2y = 0, F(c, 0), B(0, b)$, 则 $\frac{bc}{\sqrt{b^2 + 4}} = \sqrt{2} \times \frac{2b}{\sqrt{b^2 + 4}}$, 则 $c = 2\sqrt{2}$, 离心率 $e = \frac{c}{2} = \sqrt{2}$, 故选 D.

数学(理科)试题参考答案 第 1 页(共 7 页)

7.【答案】A

$$\begin{aligned} \text{【详解】} \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) &= \sin\left(\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\right) = -\sin\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= -\frac{2\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\tan^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + 1} = -\frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1} = -\frac{12}{13}, \text{故选 A.} \end{aligned}$$

8.【答案】B

【详解】乙和丙不在相邻两天参加志愿服务的不同次序数为 $A_4^1 A_3^2$, 其中甲安排在第一天的次序数为 $A_3^3 A_4^2$, 于是得 $A_4^1 A_3^2 - A_3^3 A_4^2 = 408$, 则不同的安排方案共有 408 种. 故选 B.

9.【答案】C

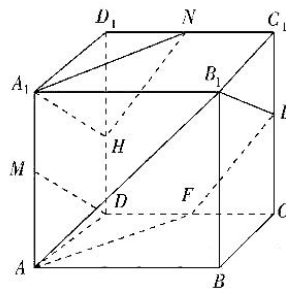
【详解】由抛物线性质知该圆与抛物线准线相切, 所以圆 C 的直径等于直线 $y = 3$ 与直线 $y = -1$ 间的距离, 即 $|AB| = 4$, 故选 C.

10.【答案】C

【详解】求得 $f'(2+x) = -2f'(2-x) - 2x + 6$, 令 $x = 0$, 得 $f'(2) = 2, f(2) = 0$, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程是 $2x - y - 4 = 0$, 故选 C.

11.【答案】A

【详解】如图, 由平行的判断与性质, 易得截面为等腰梯形 $AFEB_1$, 其中 E, F 为所在棱的中点, $EF = 2\sqrt{2}, AB_1 = 4\sqrt{2}, AF = B_1E = \sqrt{13}$, 梯形的高为 $\sqrt{(\sqrt{13})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$, 故 $S_{\text{梯形}AFEB_1} = 3\sqrt{22}$, 故选 A.



12.【答案】D

【详解】根据题意, 得 $S_n = 2^n - 1$, 则 $a_n = \sqrt{3n+1}$, 数列 $\{a_n\}$ 中的整数项组成新的数列 $\{b_n\}$ 各项依次为 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, ..., 观察可知数列 $\{b_n\}$ 的奇数项是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列, 偶数项是以 4 为首项, 3 为公差的等差数列, 则 $b_{2n-1} = 3n - 1, b_{2n} = 3n + 1$, 则 $b_{2n-1} + b_{2n} = 6n$,

$$\text{所以 } \frac{T_{2022}}{2022} = \frac{6 \times (1 + 2 + \dots + 1011)}{2022} = 1518. \text{ 故选 D.}$$

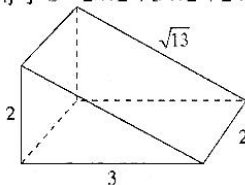
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.【答案】1

【详解】可行域不是三角形区域.

14.【答案】 $16 + 2\sqrt{13}$

【详解】该“堑堵”直观图如图, 表面积等于 $S = 2 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times \sqrt{13} = 16 + 2\sqrt{13}$.



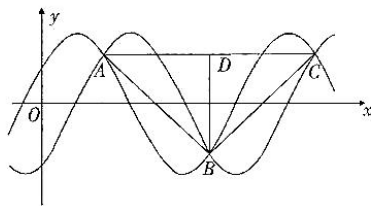
数学(理科)试题参考答案 第 2 页(共 7 页)

15. 【答案】丙

【详解】由题意知若甲选对答案,则乙、丙两人都说了真话,不合题意;若乙选对答案,则甲、丙、丁三人都说了真话,不合题意;若丙选对答案,则乙、丙、丁三人都说了假话,符合题意;若丁选对答案,则甲、丙两人都说了真话,不合题意;故选对正确答案的同学是丙.

16. 【答案】 π

【详解】作出函数 $y = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 和 $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象, 如图所示. 由图可知 $|AC| = \frac{2\pi}{\omega}$.
取 AC 的中点 D , 连接 BD , 则 $BD \perp AC$. 由 $\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 得 $\omega x - \frac{\pi}{3} + \omega x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 即 $\omega x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12} + k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 A 的纵坐标为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $|BD| = \sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$, 解得 $\omega = \pi$.



三、解答题: 共 70 分.

17. 【详解】由题得 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - \cos^2 \omega x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{\cos 2\omega x}{2} = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$, 又周期 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = 6$,

则 $\omega = \frac{\pi}{6}$, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$. (2 分)

(1) 由 $f\left(\frac{6}{\pi}A\right) = 1$, 得 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 又 $0 < A < \pi$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$. 由 $f\left(\frac{6}{\pi}B\right) = \frac{1}{2}$, 得 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

又 $0 < B < \pi$, 则 $B = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2}$, 又由 $c > b$ 得 $C > B$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\pi}{2}$, (4 分)

故 $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = 2$. (6 分)

(2) 由题得 $a_n = n \cdot f\left(2n + \frac{1}{2}\right) = n \cdot \sin \frac{2n\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} &= (3n-2) \cdot \sin \frac{2(3n-2)\pi}{3} + (3n-1) \cdot \sin \frac{2(3n-1)\pi}{3} + 3n \cdot \sin \frac{6n\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(3n-2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(3n-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022} = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{2020} + a_{2021} + a_{2022})$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 674 = -337\sqrt{3}. \quad (12 \text{ 分})$$

18. 【详解】(1) 2×2 列联表如下表所示:

	了解	不了解	合计
男生	140	60	200
女生	110	90	200
合计	250	150	400

$$K^2 = \frac{400 \times (140 \times 90 - 110 \times 60)^2}{200 \times 200 \times 250 \times 150} = 9.6 > 7.879, \text{ 因此, 有超过 } 99.5\% \text{ 的把握认为该校学生对冬季奥运会}$$

项目的了解情况与性别有关; (4 分)

(2) ①采用分层抽样的方法从抽取的不理解冬季奥运会项目的学生中随机抽取 5 人, 这 5 人中男生的人数为 2, 女生的人数为 3, 再从这 5 人中抽取 3 人进行面对面交流, “男、女生至少各抽到一名”的概率为 $1 - \frac{C_3^3}{C_5^3} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$; (8 分)

②由题意得学生了解冬季奥运会项目的概率为 $\frac{250}{400} = \frac{5}{8}$, 可知 $X \sim B\left(40, \frac{5}{8}\right)$, 故 $E(X) = 40 \times \frac{5}{8} = 25$. (12 分)

19. 【详解】(1) (法 1) 取 PA, AD 中点分别为 Q, N , 连结 QB, QM, NC . 易知 $\angle APB = 90^\circ, PA = PB = 1, AB = \sqrt{2}, AN \parallel BC$, 且 $AN = BC = 1$, 得四边形 $ABCN$ 为平行四边形.

由 Q, M 分别为 PA, PD 中点, 则 $QM \parallel AD$, 且 $QM = \frac{1}{2}AD = 1$, 又梯形 $ABCD$ 中 $BC \parallel AD$, 且 $BC = 1$, 所以四边形 $BCMQ$ 为平行四边形, 则 $CM = QB$. 在等腰直角 $\triangle PAB$ 中, $QB^2 = QP^2 + PB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$, 则 $CM = \frac{\sqrt{5}}{2}$. (5 分)

(法 2) 同法 1, 得 $PA = 1, CN \parallel AB, CN = \sqrt{2}$. 连结 MN . 在 $\triangle PAD$ 中, 由 M, N 分别为 DP, DA 中点, 得 $MN = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}$, 且 $MN \parallel PA$, 又 $NC \parallel AB$, 则 $\angle MNC = \angle PAB = 45^\circ$, 所以 $CM^2 = MN^2 + NC^2 - 2MN \cdot NC \cdot \cos 45^\circ = \frac{5}{4}$,

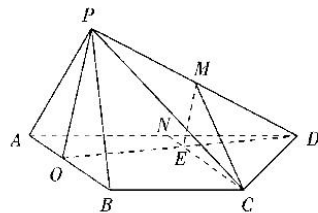
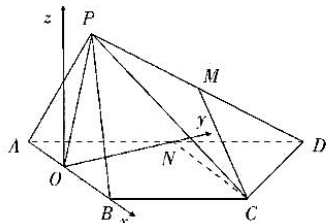
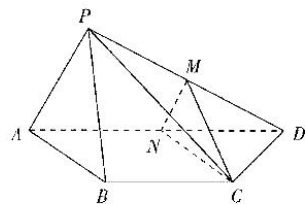
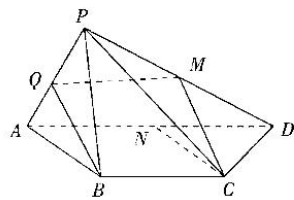
故 $CM = \frac{\sqrt{5}}{2}$. (5 分)

(法 3) 取 AB 中点为 O , 以 OB, ON 所在直线为 x, y 轴, 建立如图的空间直角坐标系 $O-xyz$, 则 $O(0, 0, 0), C\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 0\right)$, 由 $AB \perp OP$, 知点 P 位于坐标平面 yOz 内,

设 $P(0, y, z)$, 则 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}+y}{2}, \frac{z}{2}\right)$. 连结 PO , 同法 1 得 $PO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$, 所以 $CM^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(y^2 + z^2) = \frac{5}{4}$, 故 $CM = \frac{\sqrt{5}}{2}$. (5 分)

(2) (法 1) 由 (1) 注意到点 P 的轨迹实为以点 O 为圆心, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆, 该圆所在平面与 AB 垂直. 连结 OD , 交 NC 于点 E , 连结 ME , 易知 E 为 OD 的中点, 则 $ME = \frac{1}{2}PO = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 于是得到 M 的轨迹为以点 E 为圆心, $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 为半径的圆. 由 $ME \parallel PO$, 得 $\angle MEC = \angle POB = 90^\circ$, 则点 M 的轨

迹圆所在平面与 NC 垂直, 也就是说空间中点 M 的轨迹实为以 C 为顶点, E 为底面圆心, 高 $CE = \frac{3\sqrt{2}}{4}$,



底面半径 $ME = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 的圆锥的底面圆, 容易得到当 $ME \perp$ 平面 $ABCD$ 时, 所成线面角最大, 其正弦值为 $\frac{ME}{MC} =$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}. \quad (12 \text{ 分})$$

(法2) 由(1)的法3, 知 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 为平面 $ABCD$ 的法向量, $\vec{CM} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$, 设直线 CM 与平面

$$ABCD \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{CM} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{CM}|}{|\vec{n}| |\vec{CM}|} = \frac{\left|\frac{z}{2}\right|}{\sqrt{\frac{9}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}}} = \frac{\left|\frac{z}{2}\right|}{\sqrt{\frac{9}{8} + \frac{y^2 + z^2}{4}}} = \frac{|z|}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$\frac{\sqrt{10}}{10}$, 故当 $P\left(0, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时直线 CM 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值取最大值, 为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$. (12 分)

(法3) 由(1)的法1 知, 问题转化为求直线 BQ 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值的最大值, 则易知当平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ 时, 所求线面角最大, 此时 $\sin \angle QBA = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \angle QBP\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \angle QBP - \sin \angle QBP) =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 故直线 } CM \text{ 与平面 } ABCD \text{ 所成角的正弦值的最大值为 } \frac{\sqrt{10}}{10}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. 【详解】(1) 设 MN 的中点为 T , 则 $|OT| = \sqrt{3} - \frac{1}{2}|MN|$, 又 $|OT| = \frac{1}{2}|M'N|$, 则 $|MN| + |M'N| = 2\sqrt{3} >$

$|MM'| = 2$, 由椭圆的定义知点 N 的轨迹为以 M, M' 两点为焦点的椭圆, 且 $2a = 2\sqrt{3}$, 则 $a = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}$, 所以 $b = 1$, 故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$; (4 分)

(2) 设圆心 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 + 3y_0^2 = 3$, $\odot P: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{3}{4}$.

① 当 $x_0^2 = \frac{3}{4}$, 即 $P\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时, $\odot P$ 与两坐标轴相切, 则 OA, OB 分别为椭圆 C 的长半轴、短半轴, 所以 $|OA|^2 + |OB|^2 = 3 + 1 = 4$; (6 分)

② 当 $x_0^2 \neq \frac{3}{4}$ 时, 设过点 O 的 $\odot P$ 的切线方程为 $y = kx$, 其中直线 OA, OB 的方程分别为 $y = k_1x, y = k_2x$.

由 $\frac{|kx_0 - y_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $(4x_0^2 - 3)k^2 - 8x_0y_0k + 4y_0^2 - 3 = 0$, 则 k_1, k_2 为该方程的两根, 所以 $k_1k_2 = \frac{4y_0^2 - 3}{4x_0^2 - 3}$, 又

$$x_0^2 + 3y_0^2 = 3, \text{ 则 } k_1k_2 = -\frac{1}{3}. \quad (8 \text{ 分})$$

联立 $\begin{cases} y = kx \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$, 得 $x^2 = \frac{3}{1 + 3k^2}$, 所以 $x_A^2 = \frac{3}{1 + 3k_1^2}, x_B^2 = \frac{3}{1 + 3k_2^2}$.

$$|OA|^2 + |OB|^2 = (1 + k_1^2)x_A^2 + (1 + k_2^2)x_B^2 = \frac{3(1 + k_1^2)}{1 + 3k_1^2} + \frac{3(1 + k_2^2)}{1 + 3k_2^2} = 2 + \frac{2}{1 + 3k_1^2} + \frac{2}{1 + 3k_2^2}$$

$$= 2 + 2 \times \frac{2 + 3(k_1^2 + k_2^2)}{9k_1^2k_2^2 + 3(k_1^2 + k_2^2) + 1} = 2 + 2 \times \frac{2 + 3(k_1^2 + k_2^2)}{2 + 3(k_1^2 + k_2^2)} = 4.$$

综上, $|OA|^2 + |OB|^2 = 4$. (12 分)

数学(理科)试题参考答案 第 5 页(共 7 页)

21.【详解】(1) 求得 $f'(x) = ae^x - 1$, 由 $a > 0$ 知 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增, 又 $f'(\ln \frac{1}{a}) = 0$, 则当 $x < \ln \frac{1}{a}$ 时

$f'(x) < 0$, 当 $x > \ln \frac{1}{a}$ 时 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上递减, 在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上递增, 故 $f(x)_{\min} = f(\ln \frac{1}{a}) = -1 + \ln a$, 由题知 $f(x)_{\min} \geq 0$, 所以 $-1 + \ln a \geq 0$, 解得 $a \geq e$. (4 分)

(2) (方法 1) 构造函数 $h(x) = ae^x - \ln(x+2) + \ln a - 2$, 问题转化为函数 $h(x)$ 有两个零点, 求得 $h'(x) = ae^x - \frac{1}{x+2}$, 易知 $h'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上递增, 记 $x_1 = \max\{\ln \frac{1}{2a}, 0\}$, 则 $h'(x_1) = ae^{x_1} - \frac{1}{x_1+2} \geq ae^{\ln \frac{1}{2a}} - \frac{1}{0+2} = 0$, 记 $x_2 = \min\{\frac{1}{a} - 2, 0\}$, 则 $h'(x_2) = ae^{x_2} - \frac{1}{x_2+2} \leq ae^0 - \frac{1}{\frac{1}{a} - 2 + 2} = 0$, 所以存在唯一的

$x_0 \in (-2, +\infty)$ 使得 $h'(x_0) = 0$, 当 $-2 < x < x_0$ 时 $h'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时 $h'(x) > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(-2, x_0)$ 上递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增, 欲使函数 $h(x)$ 有两个零点, 只需 $h(x_0) < 0$, 即 $ae^{x_0} - \ln(x_0+2) + \ln a - 2 < 0$, 又 $ae^{x_0} = \frac{1}{x_0+2}$, 即 $a = \frac{1}{(x_0+2)e^{x_0}}$, 则 $(x_0+2) + 2\ln(x_0+2) - \frac{1}{x_0+2} > 0$, 设 $\varphi(u) = u + 2\ln u - \frac{1}{u}$, 显然 $\varphi(u)$ 递增且 $\varphi(1) = 0$, 所以当 $u > 1$ 时 $\varphi(u) > 0$, 则 $x_0 + 2 > 1$, 即 $x_0 > -1$. (10 分)

构造函数 $\mu(x) = (x+2)e^x (x > -1)$, 求得 $\mu'(x) = (x+3)e^x > 0$, 则 $\mu(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上递增, 由 $x_0 > -1$, 得 $\mu(x_0) > \mu(-1) = \frac{1}{e}$, 即 $(x_0+2)e^{x_0} > \frac{1}{e}$, 所以 $a = \frac{1}{(x_0+2)e^{x_0}} \in (0, e)$. (12 分)

(方法 2) 由题知 $ae^x - \ln(x+2) + \ln a - 2 = 0$ 有两个解, 即 $e^{x+\ln a} + x + \ln a = \ln(x+2) + x + 2$ 有两个解, 即 $e^{x+\ln a} + x + \ln a = \ln(x+2) + e^{\ln(x+2)}$ 有两个解. (6 分)

利用同构式, 设函数 $h(x) = e^x + x$, 问题等价于方程 $h(x + \ln a) = h(\ln(x+2))$ 有两个解. 求得 $h'(x) = e^x + 1 > 0$ 恒成立, 则 $h(x) = e^x + x$ 单调递增, 所以 $x + \ln a = \ln(x+2)$, 问题等价于方程 $x + \ln a = \ln(x+2)$ 有两个解, 即 $\ln(x+2) - (x+2) + 2 - \ln a = 0$ 有两个解, 不妨设 $t = x+2, 2 - \ln a = m$, 即 $\ln t - t + m = 0$ 有两个解. (8 分)

令 $\varphi(t) = \ln t - t + m$, 问题转化为函数 $\varphi(t)$ 有两个零点, 求得 $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - 1$, 当 $t \in (0, 1)$ 时 $\varphi'(t) > 0$, 当 $t \in (1, +\infty)$ 时 $\varphi'(t) < 0$, 则 $\varphi(t)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减. 为了使 $\varphi(t)$ 有两个零点, 需 $\varphi(1) > 0$, 解得 $m > 1$, 即 $2 - \ln a > 1$, 解得 $0 < a < e$. 由于 $\varphi(e^{-m}) = -e^{-m} < 0, \varphi(e^m) = 2m - e^{-m} < 0$, 所以 $\varphi(t)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内各有一个零点.

综上, 得 $m > 1$, 即 $2 - \ln a > 1$, 解得 $0 < a < e$. (12 分)

22.【解题思路】(1) 由题得 $\rho^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \theta}$, 即 $\rho^2(1 + \sin^2 \theta) = 2$, 即 $\rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho^2 \sin^2 \theta = 2$, 代入 $\rho \cos \theta = x$,

$\rho \sin \theta = y$, 整理得 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. (5 分)

(2) (方法 1) 注意到直线 l 经过点 $(-1, 0)$, 设 M, N 两点对应的直线的参数为 t_1, t_2 . 将 $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \end{cases}$ 代入

$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 整理得 $3t^2 - 2t - 1 = 0$, 则 $\begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{2}{3} \\ t_1 t_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$, 所以 $|MN| = \sqrt{2} |t_1 - t_2| = \sqrt{2} \times \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} =$

$\frac{4}{3}\sqrt{2}$. (10 分)

(方法2) 直线 l 的标准形式的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t' \end{cases}$ (t' 为参数), 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 整理得 $3t'^2 - 2\sqrt{2}t' - 2 = 0$. 设 M, N 两点对应的直线的参数为 t'_1, t'_2 , 则 $\begin{cases} t'_1 + t'_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ t'_1 t'_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$, 所以 $|MN| = |t'_1 - t'_2| =$

$$\sqrt{(t'_1 + t'_2)^2 - 4t'_1 t'_2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}. \quad (10 \text{ 分})$$

23. 【解题思路】(1) (方法1) 由题得 $f(x) = |x-1| - |x-2| = \begin{cases} -1, & x \leq 1 \\ 2x-3, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$, 则易知 $f(x)$ 的值域为

$[-1, 1]$. (5 分)

(方法2) 因为 $|f(x)| = ||x-1| - |x-2|| \leq |(x-1) - (x-2)| = 1$, 所以 $-1 \leq f(x) \leq 1$, 当且仅当 $(x-1)(x-2) \geq 0$, 即 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$ 时取等号, 故 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$. (5 分)

(2) 两种方法求 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 的最小值:

(方法1) 由基本不等式, 得 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(a^2 + b^2) = 1 + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{a^2}{2b^2} \geq 2$, 当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 因此 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 的最小值是 2.

(方法2) 由柯西不等式, 得 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$, 当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 因此 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 的最小值是 2.

由题得 $4f(x) \leq 2$, 即 $|x-1| - |x-2| \leq \frac{1}{2}$, 等价于 $\begin{cases} x \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 2x-3 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$, 解得 $x \leq 1$ 或 $1 < x \leq \frac{7}{4}$, 则

原不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$. (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线

