（2）若对于任意的$x\in \mathrm{R}$，$f(x)+\frac{1}{a}\le 0$恒成立，求a的最小值.

数学期中测试参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	D	D	B	B	A	A
9	10	11	12	13	14	15	16
BC	AB	BCD	ACD	2	-1	2.96	6

17．解：至少需要 3 个可测量数据.

选择组合一：①③④或②③④

在$\triangle BCD$中，因为$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，

所以$BC=\sqrt{2}$.

因为$\tan\angle ABC=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=2+\sqrt{3},\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，

所以$AC=BC\cdot\tan\angle ABC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$.

选择组合二：①②③

在$\triangle BCD$中，因为$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC=2$，

所以$BC=\sqrt{2}$.

结合正弦定理$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，可求得$\angle BCD=\frac{\pi}{4},\angle CBD=\frac{7\pi}{12}$.

因为$\tan\angle ABC=\tan\left(\pi-\frac{7\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3},\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，

所以 $AC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$.

选择组合三：①②④

在△BCD 中，因为 $\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，

所以 $\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

因为∠CBD 为钝角，所以 $\angle CBD=\frac{7\pi}{12}$，

因为 $\tan\angle ABC=\tan\left(\pi-\frac{7\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3},\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，

所以 $AC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$.

18.（1）$a_n=2^n$；（2）$(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$.

19.（1）根据所给数据得到如下 2×2 列联表：

	35 岁以下（含 35 岁）	35 岁以上	合计
使用移动支付	40	10	50
不使用移动支付	10	40	50
合计	50	50	100

根据公式可得 $K^2=\frac{100(40\times40-10\times10)^2}{50\times50\times50\times50}=36>2.706$

所以在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下，认为支付方式与年龄有关.

（2）根据分层抽样知 35 岁以下（含 35 岁）的人数为 8 人，35 岁以上的有 2 人，则 X 的可能为 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{8}{120}$

$P(X=2)=\dfrac{C_1^2C_2^1}{C_{10}^3}=\dfrac{56}{120}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{56}{120}$

其分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{8}{120}$	$\dfrac{56}{120}$	$\dfrac{56}{120}$

$E(X)=1\times\dfrac{8}{120}+2\times\dfrac{56}{120}+3\times\dfrac{56}{120}=\dfrac{12}{5}$

20.（1）因为 $PA\perp$ 底面 ABC，所以 $PA\perp BC$，

又 $\angle ABC=90°$，所以 $AB\perp BC$，

又 PA，AB 为平面 PAB 内的两条相交直线，

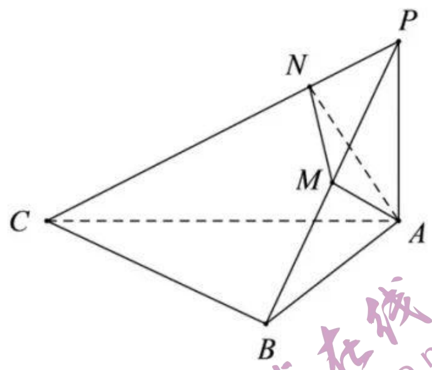
所以 $BC\perp$ 平面 PAB，

因为 $BC\subset$ 平面 PBC，

所以平面 $PBC\perp$ 平面 PAB；

（2）解法一：由（1）可知，$\angle ABP$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角，所以 $\angle ABP=45°$，

又 $PA=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$\angle ABC=90°$，所以 $AB=BC=2$，



过点 A 作 $AM\perp PB$ 于 M，则 $AM\perp$ 平面 PBC 且 M 为 PB 中点，连接 MN，

则 $\angle ANM$ 为直线 AN 与平面 PBC 所成的角，

在 $Rt\triangle ANM$ 中，$AM=\sqrt{2}$，$AN=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

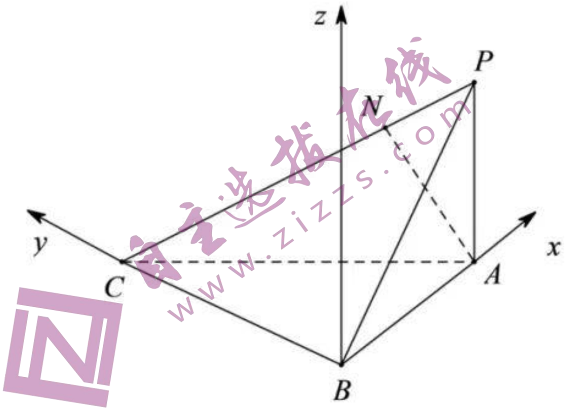
所以$\sin\angle ANM=\frac{AM}{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故$\angle ANM=60^\circ$，

所以直线AN与平面PBC所成的角为60°.

解法二：建立如图所示的空间直角坐标系，

则由已知，可得$B(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$P(2,0,2)$，$C(0,2,0)$，



设$N(x,y,z)$，$\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PC}$（$0<\lambda<1$），则$x=2-2\lambda$，$y=2\lambda$，$z=2-2\lambda$，

因为$AN\perp PC$，$\overrightarrow{AN}=(x-2,y,z)$，$\overrightarrow{PC}=(-2,2,-2)$，

所以$-2(x-2)+2y-2z=0$，

解得$\lambda=\frac{1}{3}$，所以$N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，故$\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，

设平面PBC的法向量为$\vec{a}=(x,y,z)$，因为$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(2,0,2)$，

由$\begin{cases}\vec{a}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2y=0\\ 2x+2z=0\end{cases}$，

令$x=1$，则$z=-1$，

所以$\vec{a}=(1,0,-1)$为平面PBC的一个法向量，

所以$\cos\langle\vec{a},\overrightarrow{AN}\rangle=\frac{-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}{\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故直线AN与平面PBC所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以直线 AN 与平面 PBC 所成的角为 $60°$.

21．解：（1）设双曲线 C 的半焦距为 c，

由点 $A(a,0)$ 在圆 $O:x^2+y^2=2$ 上，得 $a=\sqrt{2}$，

由 $\vec{AF_1}\cdot\vec{AF_2}=(-c-\sqrt{2},0)\cdot(c-\sqrt{2},0)=2-c^2=-2$，得 $c=2$，

所以 $b^2=a^2-c^2=2$，

所以双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）设直线 l 与 x 轴相交于点 D，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$

当直线 l 的斜率在存在时，直线 l 为 $x=\pm\sqrt{2},|OD|=\sqrt{2},|MN|=2\sqrt{2}$，得

$S_{\nabla OMN}=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot|OD|=2$

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，显然 $k\neq 0$，则 $D\left(-\dfrac{m}{k},0\right)$

把直线 l 的方程与 $C:x^2-y^2=2$ 联立得 $\left(k^2-1\right)x^2+2kmx+m^2+2=0$,

由直线 l 与轨迹 C 有且只有一个公共点，且与双曲线 C 的两条渐近线分别相交可知直线 l 与双曲线的渐近线不平行，所以 $k^2-1\neq 0$，且 $m\neq 0$，

于是得 $\begin{cases}\Delta=4k^2m^2-4\left(k^2-1\right)\left(m^2+2\right)=0\\ \left|k^2-1\right|\neq 0\end{cases}$，

得 $m^2=2\left(k^2-1\right)>0$，得 $k>1$ 或 $k<-1$，

设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\ y=x\end{cases}$，得 $y_1=\dfrac{m}{1-k}$，

同理得 $y_2=\dfrac{m}{1+k}$，

所以$S_{VOMN}=\frac{1}{2}|OD||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left|\frac{m}{k}\right|\left|\frac{m}{1-k}-\frac{m}{1+k}\right|=\left|\frac{m^2}{1-k^2}\right|=2$.

综上，$VOMN$ 的面积恒为定值 2.

22．解：（1）因为$a=0$，

所以$f(x)=-xe^x$，$f'(x)=-(x+1)e^x$.

令$f'(x)=0$，得$x=-1$.

当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)>0$；

当$x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)<0$.

故$f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-1)$，单调递减区间是$(-1,+\infty)$.

（2）$f'(x)=4ae^{2x}-(x+1)e^x=-e^x(x+1-4ae^x)$.

因为$\forall x\in R$，$f(x)+\frac{1}{a}\le 0$，

又$f(0)=2a$，所以$2a+\frac{1}{a}\le 0$，则$a<0$.

令$g(x)=x+1-4ae^x$，则$g(x)$在 R 上单调递增.

因为当$x<0$时，$g(x)<x+1-4a$，

所以$g(4a-1)<4a-1+1-4a=0$.

因为$g(-1)=-4ae^{-1}>0$，

所以$\exists x_0\in(4a-1,-1)$，使得$g(x_0)=0$.

且当$x\in(-\infty,x_0)$时，$g(x)<0$，则$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$g\left(x\right)>0$，则 $f'\left(x\right)<0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递减.

故 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(x_0\right)=2ae^{2x_0}-x_0e^{x_0}$.

由 $g\left(x_0\right)=x_0+1-4ae^{x_0}=0$，得 $a=\dfrac{x_0+1}{4e^{x_0}}$.

由 $f\left(x\right)_{\max}+\dfrac{1}{a}\le 0$，得 $x_0\mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^{2x_0}\cdot\dfrac{x_0+1}{2\mathrm{e}^{x_0}}\ge\dfrac{4\mathrm{e}^{x_0}}{x_0+1}$，

即 $\dfrac{x_0-1}{2}\ge\dfrac{4}{x_0+1}$.

结合 $x_0+1<0$，得 $x_0^2-1\le 8$，所以 $-3\le x_0<-1$.

令 $h\left(x\right)=\dfrac{x+1}{4e^{x}}\left(-3\le x<1\right)$.则 $h'\left(x\right)=\dfrac{-x}{4e^{x}}>0$，

所以 $h\left(x\right)$ 在 $[-3,-1)$ 上单调递增，

所以 $h\left(x\right)\ge h\left(-3\right)=\dfrac{-e^{3}}{2}$，即 $a\ge-\dfrac{e^{3}}{2}$.

故 a 的最小值为 $-\dfrac{e^{3}}{2}$.