柳州高中／南宁三中高三（4 月）联考

理 科 数 学

注意事项：

1. 本卷共 150 分，考试时间 120 分钟．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上．

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3. 考试结束，将本试题和答题卡一并交回．

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $P=\{x\,|\,|x|\leqslant 2, x\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x\,|-1<x<\frac{5}{2}\}$，则 $P\cap Q=$ （　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,2\}$

2. 若复数 z 满足 $(1+2\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$，则复数 z 的共轭复数在复平面内对应的点所在的象限为 （　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 设 $x\in[0,\pi]$，向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3}\sin x,\sin x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\cos 2x=$ （　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 1 或 $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1 或 $\frac{1}{2}$

4. 如图 1，网格小正方形的边长为 1，网格纸上绘制了一个多面体的三视图，则该多面体的体积为 （　　）

A. 14　　B. 7

C. $\frac{14}{3}$　　D. $\frac{7}{3}$

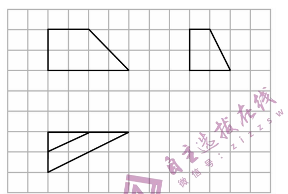

图 1

5. 甲单位有 5 名男性志愿者，7 名女性志愿者；乙单位有 4 名男性志愿者，2 名女性志愿者，从两个单位任抽一个单位，然后从所抽到的单位中任取 1 名志愿者，则取到男性志愿者的概率为 （　　）

A. $\frac{13}{24}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{5}{18}$　　D. $\frac{11}{24}$

6. 若 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{b}{a^2}+\frac{4}{b}+\frac{a}{2}$ 的最小值为 （　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

7. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x+y-8\leqslant 0,\\ 2x-y\geqslant 0,\\ x+y-3\geqslant 0,\end{cases}$ 若直线 $y=kx-1$ 经过该可行域，则实数 k 的最小值为（　　）

A. -5　　B. $-\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. $-\frac{2}{5}$

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，若 $a=f(\log_2\frac{1}{6})$，$b=f(\log_2 4.9)$，$c=f(2^{0.8})$，则 a,b,c 的大小关系是 （　　）

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $B=60^\circ$，$b=4$，则下列判断中错误的是（　　）

A. 若 $A=\frac{\pi}{4}$，则 $a=\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　B. 若 $a=\frac{9}{2}$，则该三角形有两解

C. $\triangle ABC$ 周长的最小值为 12　　D. $\triangle ABC$ 面积的最大值 $4\sqrt{3}$

10. 某中学高一年级组织了一次模拟测试，分一部和二部各 750 人参加．考试后统计的数学成绩服从正态分布，其中一部数学成绩的正态密度函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-110)^2}{200}}$，$x\in\mathbf{R}$，二部数学成绩 $\xi\sim N(115,56.25)$，则下列结论错误的是 （　　）

附：随机变量 ξ 服从正态分布 $N\sim(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)=0.9974$．

A. 一部这次考试的数学成绩 $x\sim N(110,10)$

B. 二部的分数在 100 分到 122.5 分之间的大约有 614 人

C. 一部和二部分数在 130 分以上的人数大致相等

D. 二部的数学平均成绩高于一部的数学平均成绩

11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$BC\perp CP$，且 $BC=1$，$CP=2$，$AB=3$，$AP=\sqrt{14}$，则此三棱锥外接球的体积为 （　　）

A. $\sqrt{14}\pi$　　B. $\frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$　　C. $\frac{8\sqrt{14}}{3}\pi$　　D. $2\sqrt{14}\pi$

12. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，上顶点为 A，若存在直线 l 与椭圆交于不同两点 B、C，且 ΔABC 重心为 F，则直线 l 斜率的取值范围是 （　　）

A. $(0,\sqrt{2})$　　B. $(0,\frac{3}{2}]$　　C. $(0,1)$　　D. $(-2,0)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 若多项式 $(x-\frac{2}{x})^n$ 的展开式中第 5 项的二项式系数最大，请写出一个满足题意的 n 的值________．

14. 一个酒杯的轴截面是抛物线的一部分，它的方程是 $x^2=2y(0\leqslant y\leqslant 20)$．在杯内放入一个玻璃球，要使球触及酒杯底部，则玻璃球的半径 r 的范围为________．

15. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{9}x^3+x^2-2ax+1$，若函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上有极值，则实数 a 的取值范围为________．

16. 若函数 $f(x)=(x^2+\frac{1}{x^2})\ln x-\frac{a}{4}(e^{ax^2}+1)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是________．

三、解答题:本大题共 7 小题,满分 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题(60 分)

17.(本小题满分 12 分)

记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,$\dfrac{2S_n}{n}=a_n+2$.

(1) 证明$\{a_n\}$是等差数列;

(2) 已知 $a_2=5$,若 $c_n=2^{n-1}\cdot a_n$,求数列$\{c_n\}$的前 n 项和.

18.(本小题满分 12 分)

中国女排,曾经十度成为世界冠军,铸就了响彻中华的女排精神.看过中国女排的纪录片后,某大学掀起“学习女排精神,塑造健康体魄”的年度主题活动,一段时间后,学生的身体素质明显提高,将该大学近 5 个月体重超重的人数进行统计,得到如下表格:

月份 x	1	2	3	4	5
体重超重的人数 y	640	540	420	300	200

(1) 若该大学体重超重人数 y 与月份变量 x(月份变量 x 依次为 1,2,3,4,5…)具有线性相关关系,请预测从第几月份开始该大学体重超重的人数降至 100 人以下?

(2) 该大学鼓励学生自发组织各项体育比赛活动,甲、乙两班同学利用课余时间进行排球比赛,规定:每一局比赛中获胜方记 1 分,失败方记 0 分,没有平局,首先获得 3 分者获胜,比赛结束.假设每局比赛甲班获胜的概率都是$\dfrac{3}{5}$.若甲班以 1∶0 的比分领先时,记 X 表示到结束比赛时还需要比赛的局数,求 X 的分布列及期望.

附 1:回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2};\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

附 2:参考数据:$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=5180$,$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$.

19.(本小题满分 12 分)

如图 2,以矩形 $ABCD$ 的 CD 边为直径作半圆 O,点 E 为半圆上一点,满足 $\angle EDC=60°$,$BC=1$.现将半圆沿 CD 折起,使得半圆面和平面 $ABCD$ 垂直.

(1) 求证:平面 $ADE\perp$ 平面 BCE.

(2) 若 P 是半圆弧 CD 上的一点(不包含 C、D 两个端点),且异面直线 AE 与 BC 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.是否存在一点 P,使得二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$?若存在,求出线段 PC 的长度,若不存在,请说明理由.

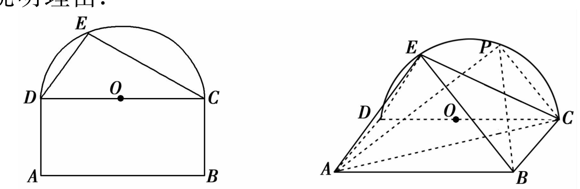

图 2

20.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=\ln(x+1)-x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x>0$ 时,$\dfrac{kx^2}{e^x-1}-x\leqslant f(x)$ 恒成立,求 k 的最大值.

21.(本小题满分 12 分)

双曲线 C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$,圆 O:$x^2+y^2=2$ 与 x 轴正半轴交于点 A,圆 O 在点 A 处的切线被双曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设圆 O 上任意一点 P 处的切线交双曲线 C 于两点 M、N,试判断 $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值?若为定值,求出该定值;若不是定值,请说明理由;

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分 10 分)[选修 4－4:坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的普通方程为 C_1:$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$,曲线 C_2 的极坐标方程为:$\rho=2\cos\theta+4\sin\theta$,以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线 C_1 参数方程和曲线 C_2 的普通方程;

(2) 若曲线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho>0)$与曲线 C_1,C_2 分别交于 M,N 两点,求 $|MN|$.

23.(本小题满分 10 分)[选修 4－5:不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x-2|+3|x|$.

(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 10$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的最小值为 m,正数 a,b,c 满足 $a+b+c=m$,求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{4}{3}$.