

秘密★启用前

2020~2021 学年度第二学期期末考试

高二数学试题

2021. 7

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡上.

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 下列求导正确的是

A. $(\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$

B. $(\cos x)' = \sin x$

C. $(e^{-x})' = e^{-x}$

D. $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$

2. 一名同学有 2 本不同的数学书, 3 本不同的物理书, 现要将这些书放在一个单层的书架上. 如果要将全部的书放在书架上, 且不使同类的书分开, 则不同放法的种数为

A. 24

B. 12

C. 120

D. 60

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 与公比 q 变化时, $a_2 a_5 a_{11}$ 是一个定值, 则一定为定值的项是

A. a_5

B. a_6

C. a_7

D. a_8

4. 当 $P(B) > 0$ 时, 若 $P(\bar{A}) = 1 - P(A|B)$, 则

A. $A \subseteq B$

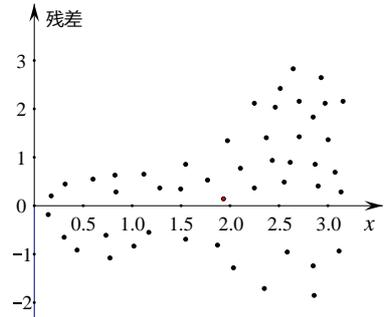
B. $A \cap B = \emptyset$

C. A 与 B 相互独立

D. A 与 B 互为对立

5. 根据变量 Y 和 x 的成对样本数据, 由一元线性回归模型 $\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$ 得到线性回

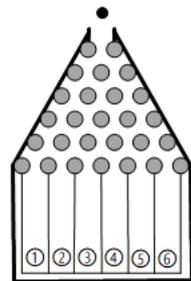
归模型 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 对应的残差如图所示, 模型误差



- A. 满足一元线性回归模型的所有假设
 B. 满足回归模型 $E(e) = 0$ 的假设
 C. 满足回归模型 $D(e) = \sigma^2$ 的假设
 D. 不满足回归模型 $E(e) = 0$ 和 $D(e) = \sigma^2$ 的假设
6. 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列, $A_n = a_n + a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 给出命题: ①若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $\{A_n\}$ 是等差数列; ②若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $\{A_n\}$ 是等比数列; ③若 $\{A_n\}$ 是等差数列, 则 $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列. 其中正确命题的个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

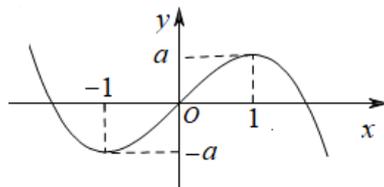
7. 右图是一块高尔顿板示意图: 在一块木板上钉着若干排互相平行但相互错开的圆柱形小木块, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 小球从上方的通道口落下后, 将与层层小木块碰撞, 最后掉入下方的某一个球槽内. 若小球下落过程中向左、向右落下的机会均等, 则小球最终落入②号球槽的概率为



- A. $\frac{3}{32}$ B. $\frac{5}{32}$ C. $\frac{15}{64}$ D. $\frac{5}{16}$

8. 已知三次函数 $f(x)$ 的图象如图, 则不正确的是

- A. $f'(2) > f'(3)$
 B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'(-1)$
 C. 若 $f(x) = 2xf'(0) - \frac{1}{3}x^3 - x$, 则 $a = \frac{3}{4}$
 D. $x \cdot f'(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 对变量 y 和 x 的一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 进行回归分析，建立回归模型，则

- A. 残差平方和越大，模型的拟合效果越好
- B. 若由样本数据得到经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，则其必过点 (\bar{x}, \bar{y})
- C. 用决定系数 R^2 来刻画回归效果， R^2 越小，说明模型的拟合效果越好
- D. 若 y 和 x 的样本相关系数 $r = -0.95$ ，则 y 和 x 之间具有很强的负线性相关关系

10. 已知 $n, m \in \mathbf{N}^*$ ，且 $n > m$ ，则

- A. $C_n^m = C_n^{n-m}$
- B. $A_n^{m+1} > A_n^m$
- C. $A_n^m > C_n^m$
- D. $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$

11. 杨明上学有时坐公交车，有时骑自行车。他各记录了 50 次坐公交车和骑自行车所花的时间，经数据分析得到：坐公交车平均用时 30 min，样本方差为 36；骑自行车平均用时 35 min，样本方差为 4。假设坐公交车用时 X （单位：min）和骑自行车用时

Y （单位：min）都服从正态分布。正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的参数 μ 用样本均值估计，参数 σ 用样本标准差估计，则

- A. $P(X \leq 25) < P(X \geq 30)$
- B. $P(Y \leq 30) < P(Y \geq 45)$
- C. $P(X < 24) > P(Y > 39)$
- D. 若某天只有 35 min 可用，杨明应选择坐公交车

12. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ， $b \neq 0$ ， $a \neq b$ ， $f(x) = b(x-a)^2(x-b)$ ，则

- A. 若 a 是极大值点，则 $ab < b^2$
- B. 若 a 是极小值点，则 $ab > b^2$
- C. 关于 x 的方程 $f(x) = f(\frac{a+2b}{3})$ 有三个实根
- D. 关于 x 的方程 $f(x) = f(\frac{2a+b}{3})$ 有三个实根

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(1+x)^4 + (1+x)^5 + (1+x)^6$ 的展开式中 x^4 的系数是_____（用数字作答）。

14. a 是 2 与 8 的等比中项， $a+1$ 是 -1 与 $1-2\sqrt{b}$ 的等差中项，则 $a+b$ 的值为_____。

15. 已知随机变量 X 的分布列为:

X	1	2	3
P	a	$\frac{1}{3}$	b

若 $E(X) = \frac{5}{3}$, 则 $D(3X+1) =$ _____.

16. 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $\frac{ae^x}{x} + \ln x \geq x-1$ 恒成立, 则实数 a 的取值区间为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

在 $(2x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中, 只有第 4 项的二项式系数最大.

(1) 写出正整数 n 的值 (不需要具体过程);

(2) 求展开式中的常数项;

(3) 展开式中各项二项式系数之和记为 A , 各项系数之和记为 B , 求 $A+B$.

18. (本题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & n \text{ 为奇数,} \\ a_n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

(1) 求 a_2, a_3, a_4 , 并求 a_n ;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

19. (本题满分 12 分)

有 3 台机床加工同一型号的零件, 第 1 台加工零件的次品率为 4%, 第 2, 3 台加工零件的次品率均为 6%, 加工出来的零件混放在一起. 已知第 1, 2, 3 台机床加工的零件数分别占总数的 25%, 35%, 40%. 记 A_i 为“零件为第 i 台机床加工” ($i = 1, 2, 3$).

(1) 任取一个零件, 计算它是次品的概率;

(2) 如果取到的一个零件是次品, 分别计算它是第 1, 2 台机床加工的概率.

20. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + 2k \ln x$, $k \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 求 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值.

21. (本题满分 12 分)

某高中学校为了解高二年级学生在 2021 年高考和中考期间居家学习的自制力, 随机抽取了 100 名学生, 请他们的家长 (每名学生请一位家长) 对学生打分, 满分为 10 分. 下表是家长所打分数 x 的频数统计:

分数 x	5	6	7	8	9	10
频数	5	15	20	25	20	15

- (1) 求家长所打分数的平均值 \bar{x} ;
- (2) 在抽取的 100 位学生中, 男同学共 50 人, 其中打分不低于 8 分的男同学为 20 人, 填写列联表. 若打分不低于 8 分认为“自制力强”, 打分低于 8 分认为“自制力一般”, 依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 判断高二年级学生的性别与自制力的强弱是否有关联? 如果结论是性别与自制力的强弱有关联, 请解释它们如何相互影响.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

α	0.01	0.005	0.001
x_α	6.635	7.879	10.828

性别 X	自制力 Y		合计
	不小于 8 分	小于 8 分	
男	20	30	50
女			50
合计			100

22. (本题满分 12 分)

已知 $f(x) = e^x + a \sin x - \frac{1}{2}x^2 - 1$ ($a \leq 2$).

- (1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 讨论 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内极值点的个数.