绝密★考试结束前（暑假返校联考）

Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2022 届高三第一次联考

数学试题卷

命题：慈溪中学 岑光辉、冯双婕　　审题：桐乡高级中学 李亮　路桥中学 李健力　　校稿：王 峥

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟；
2. 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

参考公式：

如果事件 A,B 互斥那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

如果事件 A,B 相互独立,那么

$P(AB)=P(A)P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p ,那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\dots,n)$

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，

h 表示为台体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

选择题部分（共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知 i 是虚数单位，则复数 $\frac{2}{2-i}$ 的虚部是

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{5}i$　　D. $\frac{4}{5}i$

2．已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|\lg x<1\}$，则 $A\cap B=$

$-1<x<3$　　$0<x<10$

A. $\{x|-1<x<10\}$　　B. $\{x|x<10\}$

C. $\{x|0<x<3\}$　　D. $\{x|0<x<e\}$

3．已知非零向量$\vec{a},\vec{b}$，则“$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$”是“$\vec{a}$与$\vec{b}$共线”的

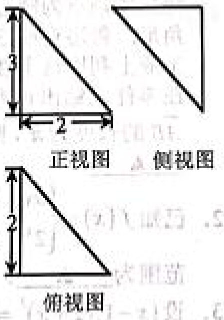
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．设实数x，y满足$\begin{cases}2x+y-5\le 0\\2x-y+1\ge 0\\x-y+1\le 0\end{cases}$，则目标函数$z=x-2y$的最小值是

A．-2　　B．-6

C．$-\frac{10}{3}$　　D．-5



第5题图

5．右图为某几何体的三视图，则该几何体的体积为

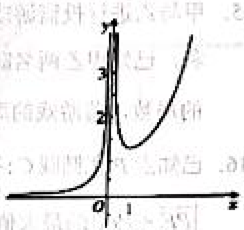
A．2　　B．4

C．6　　D．12

6．已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，满足$\vec{a}\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=2$，且$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\theta$，则$\cos\frac{\theta}{2}$的值为

A．$-\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$

C．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

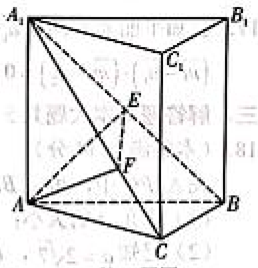


第7题图

7．以下四个选项中的函数，其函数图象最适合如图的是

A．$y=\frac{e^{|2x|}}{x}$　　B．$y=\frac{(x^2+2)e^x}{x}$

C．$y=\frac{e^x}{|2x|}$　　D．$y=\frac{e^x}{x^2}$



第8题图

8．《九章算术》中将底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱称为“堑堵”；底面为矩形，一条侧棱垂直于底面的四棱锥称之为“阳马”，四个面均为直角三角形的四面体称为“鳖臑”，如图在堑堵$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，且$AA_1=AB=2$.下列说法正确的是

A．四棱锥$C-A_1B_1BA$为“阳马”

B．四面体$A_1CC_1B_1$为“鳖臑”

C．四棱锥$B-A_1ACC_1$体积的最大值为$\frac{2}{3}$

D．过A点分别作$AE\perp A_1B$于点E，$AF\perp A_1C$于点F，则$EF\perp A_1B$

9．已知点$A(x_0,y_0)$在曲线$x=b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}\,(a>b>0)$上，设$B\left(0,-\sqrt{a^2-b^2}\right)$，则$|AB|+x_0$的最大值

A．与a有关，且与b有关　　B．与a有关，但与b无关

C．与a无关，但与b有关　　D．与a无关，且与b无关

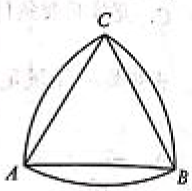
10．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2}(n\in N^*)$，则下列选项正确的是

A．$a_{2021}<a_{2020}$　　B．$\frac{2021}{4043}<a_{2021}<1$　　C．$0<a_{2021}<\frac{2021}{4043}$　　D．$a_{2021}>1$

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，单空题每空 4 分，多空题每空 3 分，共 36 分.

11. 鲁洛克斯三角形又称“勒洛三角形”，是一种特殊的三角形，指分别以正三角形的顶点为圆心，以其边长为半径作圆弧，由这三段圆弧组成的曲边三角形. 鲁洛克斯三角形的特点是：在任何方向上都有相同的宽度，机械加工业上利用这个性质，把钻头的横截面做成鲁洛克斯三角形的形状，就能在零件上钻出正方形的孔来. 如右图，已知某鲁洛克斯三角形的一段弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为 π，则线段 AB 的长为__▲__，该鲁洛克斯三角形的面积为__▲__.



第 11 题图

12. 已知 $f(x)=\begin{cases} ax+4, & x\le 2 \\ 2^x+2, & x>2 \end{cases}$，则 $f(f(0))=$__▲__；若函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，则 a 的取值范围为__▲__.

13. 设 $(x-1)(2+x)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_1=$__▲__，$2a_2+3a_3+4a_4=$__▲__.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $(b+c+a)(b+c-a)=3bc$，则 $\angle A=$__▲__，若 $\triangle ABC$ 的外接圆的周长为 4π，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为__▲__.

15. 甲与乙进行投篮游戏，在每局游戏中两人分别投篮两次，每局投进的次数之和不少于 3 次则胜利，已知甲乙两名队员投篮相互独立且投进篮球的概率均为 $\frac{2}{3}$，设 X 为甲乙两名队员获得胜利的局数，若游戏的局数是 27，则 $E(X)=$__▲__.

16. 已知点 P 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，左顶点为 A，点 F_1，F_2 分别为椭圆 C 的左、右焦点，$\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|$ 的最大值和最小值分别为 4 和 $2\sqrt{3}$. 直线 l 过点 F_2，且与 AP 平行，过 A,P 两点作 l 的垂线，垂足分别为 D,C，当矩形 $APCD$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ 时，则直线 AP 的斜率是__▲__.

17. 已知平面非零向量 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}$ 满足 $\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{n}\right)/\!/\left(\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{n}\right)$，$\left|\overrightarrow{n}\right|=1$，若 $\left|\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{n}\right|=\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{n}$ （$i=1,2$），$\left(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{a_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{a_2}\right)=0$，则 $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}$ 的最小值为__▲__.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18.（本题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $a\sin B+\sqrt{3}b\cos A=0$.

（1）求角 A 的大小；

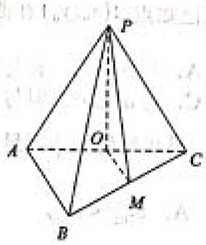
（2）已知 $a=2\sqrt{7}$，$b=2$，设 D 为 BC 边上一点，且 AD 为角 A 的平分线，求 $\triangle ABD$ 的面积.

19.（本题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点

（1）证明：$PO\perp$ 平面 ABC

（2）若点 M 为 BC 的中点，求 PC 与平面 POM 所成的角的正弦值.



20.（本题满分 15 分）

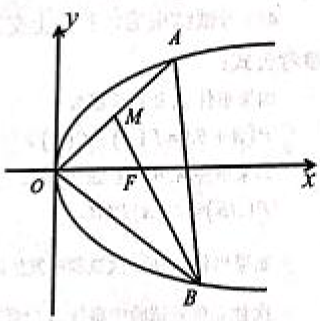
已知公比 $q>1$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 满足：$a_1=2$，$b_1=1$，其中 $a_2=b_4$，且 a_3 是 b_2 和 b_8 的等比中项.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）记数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，若当 $n\in N^*$ 时，不等式 $(-1)^n\lambda-T_n<0$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

21.（本题满分 15 分）

已知 O 为坐标原点，F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 $A(x_0,y_0)$ 在抛物线上，其中 $y_0>0$，弦 OA 的中点为 M，以 M 为端点的射线 MF 与抛物线交于点 B.



（1）若 F 恰好是 ΔAOB 的重心，求 y_0；

（2）若 $1\le y_0\le 2$，求 $\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OMF}}$ 的取值范围.

22.（本题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)\left(e^x-1\right)$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）若方程 $f(x)=a$ 有两个不同实根 x_1、x_2，证明：$|x_1-x_2|\le\dfrac{2ea}{e-1}+1$.

Z20名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2022届高三第一次联考

数学参考答案

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	D	A	D	C	D	B	B

二、填空题：本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。

11. 3；$\frac{9\pi-9\sqrt{3}}{2}$

12. 18；$(0,1]$

13. -4；31

14. $\frac{\pi}{3}$；$3\sqrt{3}$

15. 16

16. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. 0

三、解答题：本大题共5小题，共74分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. 解：

（1）由正弦定理得 $\sin A\sin B=-\sqrt{3}\sin B\cos A$ 3分

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=-\sqrt{3}\cos A$，

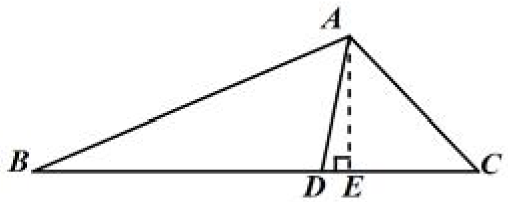
所以 $\tan A=-\sqrt{3}$ 5分

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$， 7分

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $28=4+c^2-4c\cos120^\circ$，$\therefore c=4$ 9分

由角平分线性质知：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{a}=2$，所以 $\frac{BD}{BC}=\frac{2}{3}$ 11分

过A做 AE 垂直 BC 于 E 点，



则 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AE\cdot BD, S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AE\cdot BC$

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ 14分

19．解：

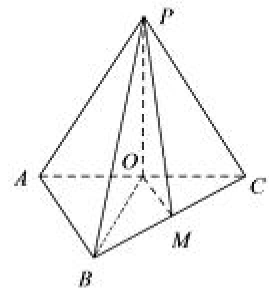
（1）连接OB，∵ $PA=PC$，O为AC中点，∴ $PO\perp AC$；…………………3 分

$PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，又 $AB=BC=2\sqrt{2}, AC=4$，则 $AB^2+CB^2=AC^2$，

∴ $AB\perp BC$，……………5 分

所以$OB=\frac{1}{2}AC=2$，而$PB=4$，则 $PB^2=BO^2+OP^2$，所以$PO\perp OB$.

又$AC\cap OB=O$，所以 $PO\perp$平面ABC…………………7 分



（2）由（1）$PO\perp$平面ABC，可得$PO\perp CB$，又M是BC中点，

∴$OM//AB$，而$AB\perp BC$，∴$OM\perp CB$，又$OM\cap PO=O$，所以 $CB\perp$平面POM，

所以$\angle CPM$就是PC与平面POM所成的角…………………11 分.

在直角三角形PMC中，$CM=\frac{1}{2}CB=\sqrt{2}$，所以

$\sin\angle CPM=\frac{CM}{PC}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故PC与平面POM所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$．…………………15 分

20．解：

（1）设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

因为$a_1=2$，$b_1=1$，$a_2=b_4$，且a_2是b_2和b_8的等比中项，

所以$(1+3d)^2=(1+d)(1+7d)$，解得$\begin{cases}d=1\\q=2\end{cases}$或$\begin{cases}d=0\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$（舍）…………3 分

所以$a_n=2^n$，$b_n=n$　　…………………6 分

（2）因为$T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$ ①

$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$ ②

②-①得

$T_n=-2^1-2^2-2^3-\cdots-2^n+n\times2^{n+1}=-\frac{2(1-2^n)}{1-2}+n\times2^{n+1}=2+(n-1)\times2^{n+1}$……10 分

因为$(-1)^n\lambda-T_n<0$，即$(-1)^n\lambda<T_n$对$n\in N^*$恒成立，所以$(-1)^n\lambda<2+(n-1)\times2^{n+1}$

当n为偶数时，$\lambda<2+(n-1)\times2^{n+1}$，所以$\lambda<\left[2+(n-1)\times2^{n+1}\right]_{\min}=10$

当n为奇数时，$-\lambda<2+(n-1)\times2^{n+1}$，所以$-\lambda<\left[2+(n-1)\times2^{n+1}\right]_{\min}=2$，即$\lambda>-2$

综上可得$-2<\lambda<10$　　…………………15 分

21. 解:

(1) 设 $B(x_1,y_1)$ 由 F 是 ΔAOB 的重心，$F(1,0)$ 得 $x_0+x_1=3x_F=3$，

$y_0+y_1=3y_F=0$ ……………3 分

即 $y_0=-y_1, x_0=x_1=\frac{3}{2}x_F=\frac{3}{2}$，

因为 $y_0>0$，得 $y_0=\sqrt{6}$ …………………6 分

(2) 因为 M 为弦 OA 的中点，即 $M\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，

所以 $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OMF}}=\frac{2S_{\Delta MOB}}{S_{\Delta OMF}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}OM\cdot MB\cdot\sin\angle OMB}{\frac{1}{2}OM\cdot MF\cdot\sin\angle OMF}=\frac{2MB}{MF}$， …………………8 分

因为 M、B、F 三点共线，所以 $\frac{2MB}{MF}=\frac{2\left(\frac{y_0}{2}-y_1\right)}{\frac{y_0}{2}}=2-\frac{4y_1}{y_0}$.直线 MF 斜率不为 0，

故设直线 MF：$x=\frac{x_0-2}{y_0}y+1$，

由 $\begin{cases}x=\frac{x_0-2}{y_0}y+1\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4\frac{x_0-2}{y_0}y-4=0$ ………………10 分

得 $y_1=2\frac{x_0-2}{y_0}-2\sqrt{\left(\frac{x_0-2}{y_0}\right)^2+1}$，其中 $y_0^{\,2}=4x_0$，

则 $\frac{y_1}{y_0}=\frac{1}{2}-\frac{4}{y_0^{\,2}}-2\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{4}{y_0^{\,4}}}$， ………………12 分

因为 $1\le y_0\le 2$，

所以 $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OMF}}=\frac{2MB}{MF}=2-\frac{4y_1}{y_0}=\frac{16}{y_0^{\,2}}+8\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{4}{y_0^{\,4}}}\in\left[4+2\sqrt{5},16+2\sqrt{65}\right]$ ………15 分

22. 解:

(1) $\because f'(x)=\frac{1}{2}\left[\left(e^x-1\right)+(x-1)e^x\right]=\frac{1}{2}\left(xe^x-1\right)$ …………3 分

$\therefore$ 切线方程为 $y=\frac{1}{2}(e-1)(x-1)$ …………6 分

(2) 由 (1) 得 $f'(x)=\frac{1}{2}\left(xe^x-1\right)$，又 $f'(0)=-\frac{1}{2}$，$f'(1)=\frac{1}{2}(e-1)>0$，且 $f'(x)=\frac{1}{2}\left(xe^x-1\right)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f'(x)=\frac{1}{2}\left(xe^x-1\right)$ 有唯一实根 $x_0\in(0,1)$ …………8 分

当 $x\in\left(-\infty,x_0\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

故两根分别在 $\left(-\infty,x_0\right)$ 与 $\left(x_0,+\infty\right)$ 内，不妨设 $x_1<x_2$.

设 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}(e-1)(x-1)$，$x\in\left(x_0,+\infty\right)$，则 $g'(x)=\frac{1}{2}\left(xe^x-e\right)$，

当 $x\in\left(x_0,1\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，

$\therefore$ $g(x)$ 有最小值 $g(1)=0$，即 $f(x)-\frac{1}{2}(e-1)(x-1)\geq 0$ 恒成立，$a=f(x_2)\geq\frac{1}{2}(e-1)(x_2-1)$，

$x_2\leq\frac{2a}{e-1}+1$ ……………12 分

又因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-\frac{1}{2}x$，所以 $f(x)\geq-\frac{1}{2}x$ 恒成立，

$a=f(x_1)\geq-\frac{1}{2}x_1$，即 $x_1\geq-2a$

于是 $|x_1-x_2|\leq\frac{2a}{e-1}+1+2a=\frac{2ea}{e-1}+1$ ………………15 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。