湘豫名校联考
2023年3月高三第一次模拟考试
数学(理科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	B	A	A	C	D	C	B	C	D	B

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. D 【命题意图】本题考查集合的运算、解不等式，考查了数学运算的核心素养.

【解析】因为集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}=\{x\in\mathbf{R}\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-2|\geqslant 1\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-2|<1\}=\{x\in\mathbf{R}\mid 1<x<3\}$. 所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\in\mathbf{R}\mid 1<x<3\}=(1,3)$. 故选 D.

2. B 【命题意图】本题考查复数的运算、复数的几何意义，考查了数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】因为复数 $z=\frac{1-a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-a\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-a-(a+1)\mathrm{i}}{2}=\frac{1-a}{2}-\frac{a+1}{2}\mathrm{i}$，其在复平面内对应的点位于第四象限，所以 $\begin{cases}1-a>0,\\a+1>0,\end{cases}$ 解得 $-1<a<1$. 所以实数 a 的取值范围为 $(-1,1)$. 故选 B.

3. B 【命题意图】本题考查等差数列的性质、等比数列的通项及其性质，考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q. 因为 $3a_5$ 是 a_6 和 a_7 的等差中项，所以 $6a_5=a_6+a_7$，即 $6a_5=a_5q+a_5q^2$. 因为 $a_5\neq 0$，所以 $q^2+q-6=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-3$. 因为等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $q=2$. 又因为 $a_3=4$，所以 $a_{10}=a_3q^7=4\times 2^7=512$. 故选 B.

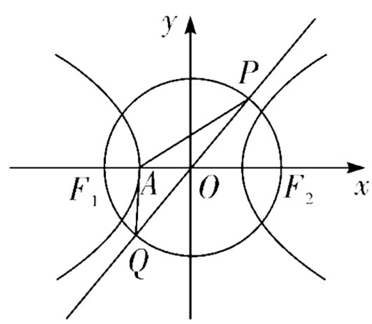
4. A 【命题意图】本题考查函数的周期性及函数图象的对称性，考查了数学抽象、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为 $f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(1+x)=f(1-x)$. 所以 $f(x)=f(2-x)$. 又 $f(2+x)+f(2-x)=0$，所以 $f(x+2)=-f(x)$. 所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 4，所以 $f(2\,023)=f(506\times 4-1)=f(-1)=-f(1)=-1$. 故选 A.

5. A 【命题意图】本题考查相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式，考查了转化思想和数据分析求解能力以及数学建模的核心素养.

【解析】设该小组三人能同时进入决赛为事件 A，则该小组三人能同时进入决赛即前两轮比赛三人都顺利通过，则 $P(A)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$. 故选 A.

6. C 【命题意图】本题考查圆与双曲线的综合问题，以及双曲线离心率的求法，考查了运算求解能力和数学运算的核心素养.



【解析】方法一：依题意，易得以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=c^2$. 又由双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，易得双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

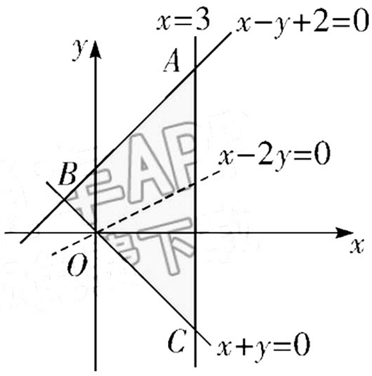
当 $y=\frac{b}{a}x$ 时，如图，设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_0,-y_0)$. 联立 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\x^2+y^2=c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=a,\\y=b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-a,\\y=-b,\end{cases}$ 所以 $P(a,b)$，$Q(-a,-b)$. 又因为 $A(-a,0)$，所以 $AQ\perp x$

轴. 因为$\overrightarrow{AP}=(2a,b)$,$\overrightarrow{AQ}=(0,-b)$. 所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=-b^2=-4a^2$,所以 $b=2a$. 因为 $a^2+b^2=c^2$,所以 $5a^2=c^2$. 同理,当 $y=-\frac{b}{a}x$ 时,亦可得 $5a^2=c^2$. 故双曲线 C 的离心率为 $e=\sqrt{5}$. 故选 C.

方法二(极化恒等式):易得坐标原点 O 为线段 PQ 的中点,且 $|PQ|=2c$,所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}[(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})^2-(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ})^2]=\frac{1}{4}(|2\overrightarrow{AO}|^2-|\overrightarrow{QP}|^2)=a^2-c^2=-4a^2$,所以 $5a^2=c^2$,$e=\sqrt{5}$. 故选 C.

7. D 【命题意图】本题考查线性规划,考查了直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题,画出满足题意的可行域如图所示,令 $z=x-2y$,$z=x-2y$ 可化为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$,$-\frac{1}{2}z$ 相当于直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$ 在 y 轴上的截距. 平移直线 $y=\frac{1}{2}x$,当直线过点 A 时,截距最大,z 最小;当直线过点 C 时,截距最小,z 最大. 联立 $\begin{cases}x-y+2=0,\\x=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=5,\end{cases}$ 所以 $A(3,5)$. 联立 $\begin{cases}x+y=0,\\x=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=-3,\end{cases}$ 所以 $C(3,-3)$. 所以 $z_{\min}=3-2\times5=-7$,$z_{\max}=3-2\times(-3)=9$. 所以 $|x-2y|_{\max}=|z|_{\max}=9$. 故选 D.



8. C 【命题意图】本题考查离散型随机变量的分布列、期望与方差,考查了数据分析、数学运算的核心素养.

【解析】由题意,得 $a+b+c+\frac{1}{3}=1$,所以 $a+b+c=\frac{2}{3}$①. 因为 $E(X)=(-1)\times a+0\times b+1\times c+2\times\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$,所以 $-a+c=\frac{1}{12}$②. 由 $P(X\geqslant1)=c+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$,得 $c=\frac{1}{4}$,代入①②解得:$a=\frac{1}{6}$,$b=\frac{1}{4}$. 所以 $D(X)=\left(-1-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(0-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(2-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{19}{16}$. 故选 C.

9. B 【命题意图】本题考查排列、组合的综合问题,考查了运算求解能力,逻辑推理和数学建模的核心素养.

【解析】根据题意,学校从 5 名优秀学生中选出 4 人去参加 3 本书籍的知识竞赛,且每本书的知识竞赛都要有该校学生参加,则必会有两人去参加同一书籍的知识竞赛. ①若选出的 4 名学生中不含甲同学,在这 4 名学生中任意取 2 人进行捆绑,则不同的安排方法共有 $C_4^2\cdot A_3^3=36$ 种;②若选出的 4 名学生中含有甲同学,则在剩余的 4 名优秀学生中再抽取 3 人,共有 $C_4^3=4$ 种方法;若甲同学和其中 1 名学生去参加同一书籍的知识竞赛,则共有 $C_3^1\cdot C_2^1\cdot A_2^2=12$ 种方法;若甲同学单独一人去参加某本书的知识竞赛,则共有 $C_2^1\cdot C_3^2\cdot A_2^2=12$ 种方法. 根据分类加法计数原理和分步乘法计数原理可得,不同的安排方法共有 $4\times(12+12)=96$ 种. 综上所述,不同的安排方法共有 $36+96=132$ 种. 故选 B.

10. C 【命题意图】本题考查数学文化、数列求和,考查了数学抽象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由 $a_{n+2}+2a_n=3a_{n+1}$,得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$. 又 $a_2-a_1=2$,所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$构成以 2 为首项,2 为公比的等比数列,所以 $a_{n+1}-a_n=2^n$. 又 $a_2-a_1=2$,$a_3-a_2=2^2$,$\cdots$,$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$,叠加可得$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}(n\geqslant2)$,即 $a_n-a_1=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$,所以 $a_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1(n\geqslant2)$. 又因为 $a_1=1$ 满足上式,所以 $a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. 所以 $a_{n+1}=2^{n+1}-1$. 因为 $2^n<2^{n+1}-1<2^{n+1}$,所以 $\log_2 2^n<\log_2(2^{n+1}-1)<\log_2 2^{n+1}$,即 $n<\log_2(2^{n+1}-1)<n+1$,所以 $b_n=[\log_2 a_{n+1}]=[\log_2(2^{n+1}-1)]=n$. 故 $\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. 所以 $S_{2\,023}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,023}-\frac{1}{2\,024}\right)=1-\frac{1}{2\,024}=\frac{2\,023}{2\,024}$. 故选 C.

11. D 【命题意图】本题考查函数的应用,考查了数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题意得,销售收入为 $100x$ 万元,当产量不足 50 万件时,利润 $f(x)=100x-p(x)-200=-\frac{1}{120}x^3+40x-200$;当产量不小于 50 万件时,利润 $f(x)=100x-p(x)-200=1\ 160-\left(x+\frac{6\ 400}{x}\right)$. 所以利润

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{120}x^3+40x-200, 0<x<50,\\ 1\ 160-\left(x+\frac{6\ 400}{x}\right), x\geqslant 50.\end{cases}$$

因为当 $0<x<50$ 时,$f'(x)=-\frac{1}{40}(x+40)(x-40)$,所以 $f(x)$ 在 $(0,40)$ 上单调递增,在 $(40,50)$ 上单调递减,则 $f(x)\leqslant f(40)=\frac{2\ 600}{3}$. 当 $x\geqslant 50$ 时,$1\ 160-\left(x+\frac{6\ 400}{x}\right)\leqslant 1\ 160-2\sqrt{x\times\frac{6\ 400}{x}}=1\ 000$,当且仅当 $x=80$ 时取等号. 又 $1\ 000>\frac{2\ 600}{3}$,所以当 $x=80$ 时,所获利润最大,最大值为 1 000 万元. 故选 D.

12. B 【命题意图】本题考查对数大小的比较及导数的应用,考查了数学抽象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】$\log_{2\ 021}2\ 022-\log_{2\ 022}2\ 023=\frac{\ln 2\ 022}{\ln 2\ 021}-\frac{\ln 2\ 023}{\ln 2\ 022}=\frac{(\ln 2\ 022)^2-\ln 2\ 021\cdot\ln 2\ 023}{\ln 2\ 021\cdot\ln 2\ 022}$.

因为 $\ln 2\ 021\cdot\ln 2\ 023<\left(\frac{\ln 2\ 021+\ln 2\ 023}{2}\right)^2=\left[\frac{\ln(2\ 022^2-1)}{2}\right]^2<\left(\frac{\ln 2\ 022^2}{2}\right)^2=(\ln 2\ 022)^2$,所以 $\log_{2\ 021}2\ 022-\log_{2\ 022}2\ 023>0$,所以 $\log_{2\ 021}2\ 022>\log_{2\ 022}2\ 023$. 比较 $\log_{2\ 021}2\ 022$ 与 $\frac{2\ 023}{2\ 022}$ 的大小,即比较 $\frac{\ln 2\ 022}{2\ 023}$ 与 $\frac{\ln 2\ 021}{2\ 022}$ 的大小. 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}(x>0)$,则 $f'(x)=\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$. 令 $g(x)=1+\frac{1}{x}-\ln x$,则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$. 所以 $g(x)$ 在定义域上单调递减,所以当 $x>e^2$ 时,$g(x)<g(e^2)=1+\frac{1}{e^2}-2<0$,所以 $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减. 所以 $f(2\ 022)<f(2\ 021)$,即 $\frac{\ln 2\ 022}{2\ 023}<\frac{\ln 2\ 021}{2\ 022}$. 所以 $\frac{\ln 2\ 022}{\ln 2\ 021}<\frac{2\ 023}{2\ 022}$,即 $\log_{2\ 021}2\ 022<\frac{2\ 023}{2\ 022}$. 综上所述,$\log_{2\ 022}2\ 023<\log_{2\ 021}2\ 022<\frac{2\ 023}{2\ 022}$. 故选 B.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\frac{11\sqrt{13}}{13}$ 【命题意图】本题考查向量的运算法则,考查了数学抽象、直观想象的核心素养.

【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,t)$,$\boldsymbol{b}=(2,t)$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\frac{11}{13}\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{c}=\left(-\frac{9}{13},\frac{2}{13}t\right)$. 因为 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$,$t>0$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,即 $-\frac{18}{13}+\frac{2}{13}t^2=0$,解得 $t=3$(负值舍去). 所以 $\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{b}=(2,3)$. 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times 2+3\times 3=11$. 所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{11}{\sqrt{13}}=\frac{11\sqrt{13}}{13}$.

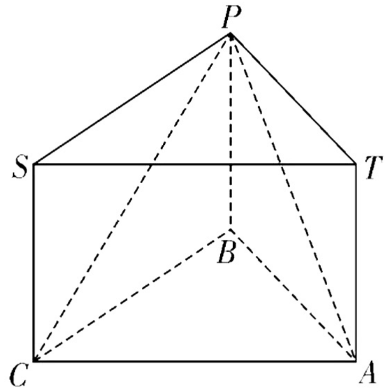
14. 3 或 -5(只答一个不得分) 【命题意图】本题考查二项式定理,考查了数学运算的核心素养.

【解析】因为 $\left(a\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的展开式中各项系数的和为 $(a+1)^6$,各二项式系数的和为 2^6,所以由题意得 $\frac{(a+1)^6}{2^6}=64=2^6$,所以 $a+1=4$,或 $a+1=-4$,解得 $a=3$,或 $a=-5$.

15. $20\sqrt{15}\pi$ 【命题意图】本题考查线面垂直以及三棱锥的外接球问题,考查了学生的运算求解能力和直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $AB=BC=PB=2\sqrt{3}$,$AC=6$,所以在 $\triangle ABC$ 中,根据余弦定理可得:$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot$

$BC\cos\angle ABC$，即 $36=(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\times(2\sqrt{3})^2\cos\angle ABC$，所以 $\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\angle ABC=120^\circ$. 所以底面 $\triangle ABC$ 是顶角为 120° 的等腰三角形. 由题意将三棱锥 $P-ABC$ 补成如图所示的直三棱柱 $TPS-ABC$，则该直三棱柱的外接球即为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，且直三棱柱的外接球球心落在上、下底面外接圆圆心连线的中点上. 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，由正弦定理得，$2r=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$，所以 $r=2\sqrt{3}$，$R^2=r^2+\left(\dfrac{PB}{2}\right)^2=12+3=15$. 所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=20\sqrt{15}\pi$.



16. -1 【命题意图】本题考查直线与椭圆的位置关系，考查了直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题意知，直线 l 的斜率存在且不为 0 和 -1，设直线 l 的方程为 $y+1=k(x-2)$，即 $y=kx-2k-1$. 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，点 M,N 的坐标均不为 $(0,1)$，联立 $\begin{cases} y=kx-2k-1, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 整理得 $(1+4k^2)x^2-8k(2k+1)x+16k^2+16k=0$，则 $\Delta=64k^2(2k+1)^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)=-64k>0$，解得 $k<0$. 因为 $\Delta>0$ 时，$x_1+x_2=\dfrac{8k(2k+1)}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}$，所以 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{(y_1-1)x_2+(y_2-1)x_1}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1-2k-2)x_2+(kx_2-2k-2)x_1}{x_1x_2}=\dfrac{2kx_1x_2-2(k+1)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{2k\cdot\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}-2(k+1)\cdot\dfrac{8k(2k+1)}{1+4k^2}}{\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}}=-1$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.【命题意图】本题考查三角恒等变换、解三角形，考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 因为 $f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos x+2\sin^2x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2x$

$=\sqrt{3}\sin 2x+(1-\cos 2x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+1=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$，…………………… 3 分

所以 $f(A)=2\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)+1=3$，所以 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$. …………………… 4 分

所以 $2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………… 5 分

(2) 方法一：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $BC^2=a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC=9+4-12\times\dfrac{1}{2}=7$，

则 $BC=\sqrt{7}$. 又点 D 为 BC 边上靠近点 C 的三等分点，所以 $BD=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. …………………… 7 分

又在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7+4-9}{4\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，…………………… 9 分

在$\triangle ABD$中，由余弦定理可得$AD^2=BA^2+BD^2-2BA\times BD\times\cos B=4+\frac{28}{9}-2\times2\times\frac{2\sqrt{7}}{3}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=\frac{52}{9}$，

所以$AD=\frac{2\sqrt{13}}{3}$. …………………………………………………………………………… 12 分

方法二：因为点D为BC边上靠近点C的三等分点，所以$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. ……………………… 8 分

等式两边同时平方可得$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\times3\times2\times\frac{1}{2}=\frac{52}{9}$，

…………………………………………………………………………………………………… 10 分

所以$|\overrightarrow{AD}|=\frac{2\sqrt{13}}{3}$，即$AD=\frac{2\sqrt{13}}{3}$. ……………………………………………………… 12 分

18.**【命题意图】**本题考查统计、独立性检验，考查了数据分析、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)因为$(0.010+0.030)\times10=0.4<0.5$，$0.4+0.045\times10=0.85>0.5$，

所以竞赛成绩的中位数在$[70,80)$内. ……………………………………………………………… 3 分

设竞赛成绩的中位数为m，则$(m-70)\times0.045+0.4=0.5$，解得$m\approx72$，

所以估计这100名学生的竞赛成绩的中位数为72. ……………………………………………… 5 分

(2)由(1)知，在抽取的100名学生中，

竞赛成绩为“优秀”的有：$100\times(0.45+0.10+0.05)=100\times0.6=60$人， ………………… 6 分

由此可得完整的2×2列联表：

	优秀	非优秀	合计
男	20	30	50
女	40	10	50
合计	60	40	100

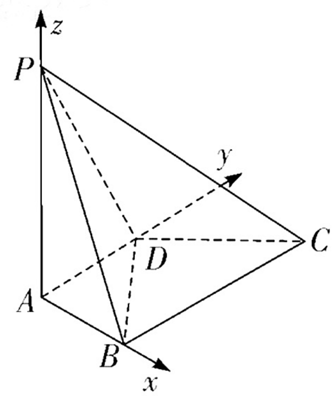
…………………………………………………………………………………………………… 8 分

因为K^2的观测值$k=\frac{100\times(20\times10-40\times30)^2}{60\times40\times50\times50}=\frac{100}{6}\approx16.667>6.635$，……………… 11 分

所以有99%的把握认为“竞赛成绩是否优秀与性别有关”. ………………………………………… 12 分

19.**【命题意图】**本题考查了空间向量中的线面角以及点的存在性问题，考查了学生的逻辑推理、运算求解能力和直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】方法一：(1)因为$AD\parallel BC$，$BC\perp AB$，所以$AD\perp AB$.



又因为$AB=AD=\frac{1}{2}BC$，$BD=\sqrt{2}$，

所以$AB=AD=1$，$BC=2$. ………………………………………………………… 2 分

因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，

所以$PA\perp AB$，$PA\perp AD$. 又$PD=\sqrt{5}$，所以$PA=\sqrt{PD^2-AD^2}=2$.

以A为坐标原点，以AB，AD，AP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,2)$. ……………………………………………… 4 分

所以$\overrightarrow{PC}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,0,2)$.

设平面PBD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

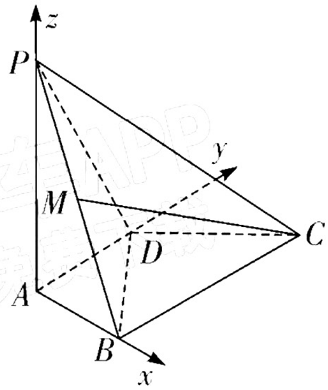
则 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot \boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BP}\cdot \boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=x,\\ z=\dfrac{1}{2}x.\end{cases}$

令 $x=2$，可得平面 PBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$.

设直线 PC 与平面 PBD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{4}{9}$.

所以直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{9}$. ………………………………………………………… 6 分

(2)不存在点 M，理由如下：



假设存在满足条件的点 M(如图).

可设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BP}=(-\lambda,0,2\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，所以 $M(1-\lambda,0,2\lambda)$.

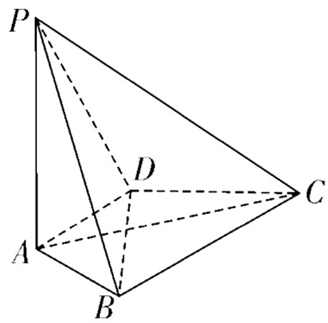
所以 $\overrightarrow{CM}=(-\lambda,-2,2\lambda)$. ………………………………………………………… 8 分

又由(1)知 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$ 为平面 PBD 的一个法向量，所以 $\overrightarrow{CM}/\!/\boldsymbol{n}$，即 $\dfrac{-\lambda}{2}=\dfrac{-2}{2}=\dfrac{2\lambda}{1}$，无解.

所以线段 PB 上不存在满足条件的点 M. ……………………………………… 12 分

方法二(几何推理法)：

(1)如图，连接 AC. 因为 $AD/\!/BC$，$BC\perp AB$，所以 $AD\perp AB$.



因为 $AB=AD=\dfrac{1}{2}BC$，$BD=\sqrt{2}$，所以 $AB=AD=1$，$BC=2$.

因为 $BC\perp AB$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}$. ………………………………… 2 分

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$，$PA\perp AD$.

因为 $PA=\sqrt{PD^2-AD^2}=2$，所以 $PC=\sqrt{AC^2+PA^2}=3$，$PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{5}$.

所以 $S_{\triangle PBD}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$，$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AB=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$. ……………… 4 分

设点 C 到平面 PBD 的距离为 h，

由 $V_{P-BDC}=V_{C-PBD}$，得 $\dfrac{1}{3}\times PA\times S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{3}\times h\times S_{\triangle PBD}$，解得 $h=\dfrac{4}{3}$.

设直线 PC 与平面 PBD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{h}{PC}=\dfrac{4}{9}$.

所以直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{9}$. ………………………………………………………… 6 分

(2)不存在点 M，理由如下：

假设存在满足条件的点 M，

由 $CM\perp$ 平面 PBD，$PB\subset$ 平面 PBD，$BD\subset$ 平面 PBD，得 $CM\perp PB$，且 $CM\perp BD$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$. ……………………………………… 8 分

因为 $BC\perp AB$，且 $PA\cap AB=A$，$PA\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，

所以 $BC\perp$ 平面 PAB. 又 $PB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PB$. ………………………………… 10 分

若存在满足条件的点 M，则点 M 必与点 B 重合.

又 BC 与 BD 不垂直，所以线段 PB 上不存在满足条件的点 M. ………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查直线与抛物线的位置关系及其应用，考查了直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，由抛物线定义可知，$|PF|=x_0+\frac{p}{2}\geqslant\frac{p}{2}$，

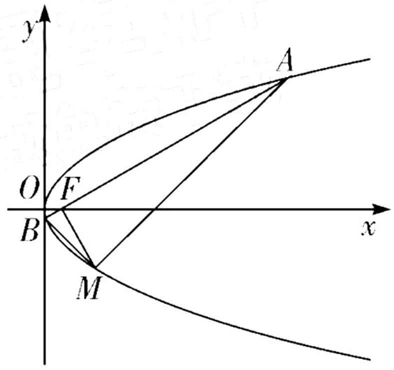
故 $\frac{p}{2}=1$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$. ………………………………………… 2 分

(2)由(1)易知 $F(1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，

若 $AB\perp x$ 轴，由 $MF\perp AB$，得 $M(0,0)$，$A(1,2)$，$B(1,-2)$ 或 $A(1,-2)$ 或 $B(1,2)$，

此时不满足 $AM\perp BM$，所以不满足题意； ………………………………………………………… 3 分

设直线 AB 的方程为 $x=my+1(m\neq 0)$，直线 MF 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+1(m\neq 0)$，如图所示，



将 $x=my+1$ 代入抛物线方程得 $y^2-4my-4=0$，所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

将 $x=-\frac{1}{m}y+1$ 代入抛物线方程得 $y^2+\frac{4}{m}y-4=0$，所以 $y_3^2+\frac{4}{m}y_3-4=0$①. ……………………………………………… 5 分

直线 AM 的斜率为 $\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_3-y_1}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{y_3+y_1}$，同理 BM 的斜率为 $\frac{4}{y_3+y_2}$.

因为 $AM\perp BM$，所以 $\frac{4}{y_3+y_1}\cdot\frac{4}{y_3+y_2}=-1$.

所以 $y_3^2+(y_1+y_2)y_3+y_1y_2=-16$，即 $y_3^2+4my_3+12=0$②. ………………………………………… 7 分

由①②解得 $y_3=\frac{4m}{1-m^2}$，将其代入①可得，$4m^2+4(1-m^2)-(1-m^2)^2=0$，

所以 $\begin{cases}m=\sqrt{3},\\y_3=-2\sqrt{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\sqrt{3},\\y_3=2\sqrt{3}.\end{cases}$ ………………………………………………………………… 8 分

当 $\begin{cases}m=\sqrt{3},\\y_3=-2\sqrt{3}\end{cases}$ 时，直线 AB 的方程为 $x=\sqrt{3}y+1$，$M(3,-2\sqrt{3})$，$|MF|=4$. ……………………… 9 分

因为 y_1,y_2 满足 $y^2-4\sqrt{3}y-4=0$，所以 $y_1+y_2=4\sqrt{3}$，$y_1y_2=-4$.

所以 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=16$，

所以 $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\times|AB|\times|MF|=\frac{1}{2}\times 16\times 4=32$. …………………………………………… 10 分

同理可得，当 $\begin{cases}m=-\sqrt{3},\\y_3=2\sqrt{3}\end{cases}$ 时，直线 AB 的方程为 $x=-\sqrt{3}y+1$，$\triangle ABM$ 的面积也为 32. ……………… 11 分

所以 $\triangle ABM$ 的面积为 32. ……………………………………………………………………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数图象的切线方程及函数的单调性与最值，不等式的证明，考查了转化思想、分类讨论思想、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为 $f(x)=x\ln x+x+1(x>0)$，所以 $f'(x)=\ln x+2$.

所以 $f'(1)=2$.

又因为 $f(1)=2$， ……………………………………………………………………………………………… 2 分

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-2=2(x-1)$，

即 $2x-y=0$. ……………………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)方法一：

证明：要证 $f(x)<e^x$，即证 $x\ln x+x+1<e^x$，即证 $\ln x+1+\frac{1}{x}<\frac{e^x}{x}$，即证 $\frac{e^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-1>0$. …… 6 分

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-1(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x-1)}{x^2}$.

由 $g'(x)=0$，可得 $x=1$. …… 8 分

因为当 $x>0$ 时，$e^x-1>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. …… 10 分

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e-1-1=e-2>0$.

所以 $g(x)>0$，结论得证. …… 12 分

方法二：

证明：因为 $f(x)=x\ln x+x+1$，

所以要证 $f(x)<e^x$，即证 $x\ln x+x+1<e^x$.

即证 $x\ln x-e^x+x+1<0$. …… 5 分

设 $\varphi(x)=x\ln x-e^x+x+1(x>0)$，

则 $\varphi'(x)=\ln x+1-e^x+1=\ln x-e^x+2$. …… 6 分

令 $h(x)=\ln x-e^x+2(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-e^x$.

易知函数 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h'\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$，$h'(1)=1-e<0$.

故存在唯一的 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $\frac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$，即 $\frac{1}{x_0}=e^{x_0}$. …… 8 分

等式两边同时取对数得 $-\ln x_0=x_0$，即 $\ln x_0=-x_0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减 .

所以 $h(x)_{\max}=h(x_0)=\ln x_0-e^{x_0}+2=-x_0-\frac{1}{x_0}+2=-\frac{(x_0-1)^2}{x_0}<0$，即 $\varphi'(x)<0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. …… 10 分

因为当 $x\to0^+$ 时，$x\ln x+x=x(\ln x+1)<0$，$1-e^x<0$，所以函数 $\varphi(x)<0$.

所以 $f(x)<e^x$ 成立. …… 12 分

(二)选考题：共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【解析】本题考查直线的极坐标方程与直角坐标方程的互化，圆的参数方程问题，考查了学生的直观想象能力，数据分析求解能力和数学运算的核心素养.

(1)因为圆 C 的圆心坐标为 $(-2,-2)$，且过原点 O，所以圆 C 的半径 $r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$.

所以圆 C 的直角坐标方程为 $(x+2)^2+(y+2)^2=8$.

由此可以得到圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+2\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=-2+2\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数). …… 3 分

因为 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 将其代入直线 l 的极坐标方程 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=-1$ 中，

可得 $x+y=-1$，即直线 l 的直角坐标方程为 $x+y+1=0$. …… 5 分

(2)由(1)知直线 $l: x+y+1=0$,

圆 C 的圆心坐标为 $(-2,-2)$,半径为 $2\sqrt{2}$.

因为圆心 $(-2,-2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-2-2+1|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, ………………………………………… 8 分

所以 $|AB|=2\sqrt{8-\frac{9}{2}}=\sqrt{14}$.

又点 P 在圆 C 上运动,所以点 P 到直线 AB 的最大距离为 $d+r=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\frac{7\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{7}}{2}$. ………………………………………… 10 分

23.【命题意图】本题考查不等式,考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)因为 $t>0$,

所以 $f(x)=|x-t|-2|x+3|=\begin{cases}-(x-t)+2(x+3)=x+t+6, x\leqslant -3,\\ -(x-t)-2(x+3)=-3x-6+t, -3<x<t,\\ (x-t)-2(x+3)=-x-6-t, x\geqslant t.\end{cases}$

即 $f(x)=\begin{cases}x+t+6, x\leqslant -3,\\ -3x+t-6, -3<x<t,\\ -x-t-6, x\geqslant t.\end{cases}$ ………………………………………… 3 分

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3]$ 上单调递增,在 $(-3,t)$,$[t,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max}=f(-3)=-3+t+6=5$,所以 $t=2$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $t=2$,则 $a+2b=2$. 因为 $a>0, b>0$,

所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\times(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+2\right)$

$=2+\frac{1}{2}\left(\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 2+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2+2=4$. ………………………………………… 8 分

当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=2b$ 时,等号成立.

又 $a+2b=2$,所以当 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 时,$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值 4. ………………………………………… 10 分