2023 届高三年级第二次阶段测试 数学 试卷解析

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	C	C	B	A

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	ACD	ACD	BCD	BCD

三、填空题:

13. $\sqrt{2}$　　**14.** $DM\perp PC$（或 $BM\perp PC$ 等）

15. $\dfrac{39\sqrt{3}}{98}$　　**16.** $\angle PBC$（或 $\angle CBP$）；200π

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别 a，b，c，且 $2\cos^2\dfrac{A-B}{2}\cos B-\sin(A-B)\sin B+\cos(A+C)=-\dfrac{3}{5}$.

（1）求 $\cos A$ 的值；

（2）若 $a=4\sqrt{2}$，$b=5$，记 $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$，求向量 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影向量.(用 $\vec{e}$ 表示)

解：

（1）由 $2\cos^2\dfrac{A-B}{2}\cos B-\sin(A-B)\sin B+\cos(A+C)=-\dfrac{3}{5}$ 得

$[\cos(A-B)+1]\cos B-\sin(A-B)\sin B-\cos B=-\dfrac{3}{5}$

即 $\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin B=-\dfrac{3}{5}$

则 $\cos(A-B+B)=-\dfrac{3}{5}$

即 $\cos A=-\dfrac{3}{5}$

（2）由 $\cos A=-\dfrac{3}{5}$，$0<A<\pi$ 得，$\sin A=\dfrac{4}{5}$

由正弦定理，有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

所以$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

由题知$a>b$，则$A>B$，故$B=\dfrac{\pi}{4}$.

根据余弦定理，有$(4\sqrt{2})^2=5^2+c^2-2\times5c\times(-\dfrac{3}{5})$

解得$c=1$或$c=-7$（舍去）.

所以向量$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影为$|\overrightarrow{BA}|\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故向量$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影向量为$\left(|\overrightarrow{BA}|\cos B\right)\vec{e}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}$.

18．(12分)

设$\{a_n\}$为各项均不相等的数列，S_n为它的前n项和，满足$\lambda na_{n+1}=S_n+1(n\in\mathrm{N}^*)$.

（1）若$a_1=1$，且a_1，a_2，a_3成等差数列，求λ的值；

（2）若$\{a_n\}$的各项均不为零，问当且仅当λ为何值时，a_2，a_3，a_4，…，a_n，…成等差数列？试说明理由.

解：

（1）令$n=1$，有$\lambda a_2=S_1+1=a_1+1=2$，所以$\lambda\neq0$且$a_2=\dfrac{2}{\lambda}$.

令$n=2$，有$2\lambda a_3=S_2+1=(a_1+a_2)+1=2(1+\dfrac{1}{\lambda})$，所以$a_3=\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2}$.

由a_1,a_2,a_3成等差数列得$2a_2=a_1+a_3$，即$\dfrac{4}{\lambda}=1+\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2}$，

解得$\lambda=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，故$\lambda$的值为$\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

（2）$n\geq2$时，$\lambda(n-1)a_n=S_{n-1}+1$，所以

$\lambda na_{n+1}-\lambda(n-1)a_n=a_n$，即$\lambda na_{n+1}=(\lambda n+1-\lambda)a_n$.

由题意知，$\lambda\neq0$，所以$a_{n+1}=\dfrac{\lambda n+1-\lambda}{\lambda n}a_n,n\geq2$.

假设$a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots$成等差数列，则$a_2,a_3,a_4$成等差数列，即$2a_3=a_2+a_4$.

又$a_3=\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}a_2,a_4=\dfrac{2\lambda+1}{3\lambda}a_3=\dfrac{2\lambda+1}{3\lambda}\cdot\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}a_2=\dfrac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{6\lambda^2}a_2$，

所以$2\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}a_2=a_2+\dfrac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{6\lambda^2}a_2$，由$\{a_n\}$的各项均不为零知$a_2\neq0$，则

$\dfrac{\lambda+1}{\lambda}=1+\dfrac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{6\lambda^2}$，解得$\lambda=1$或$\lambda=\dfrac{1}{2}$.

当$\lambda=1$时，$a_{n+1}=a_2,n\geq2$与$\{a_n\}$中的各项均不相等矛盾，故舍去.

当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，$a_{n+1}=\dfrac{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}n}a_n=\dfrac{n+1}{n}a_n,n\geq2$，即$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n},n\geq2$.

所以，$n\ge 3$时，$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots=\frac{a_2}{2}$，所以$n\ge 3$时，$a_n=\frac{n}{2}a_2$.（也可用累乘法求通项）

又$n=2$时，$a_2=a_2$满足上式，所以$a_n=\frac{n}{2}a_2$，$n\ge 2$.

所以$n\ge 2$时，$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{2}a_2-\frac{n}{2}a_2=\frac{1}{2}a_2$（与$n$无关的常数），

即$a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots$成等差数列.

故当且仅当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots$成等差数列.

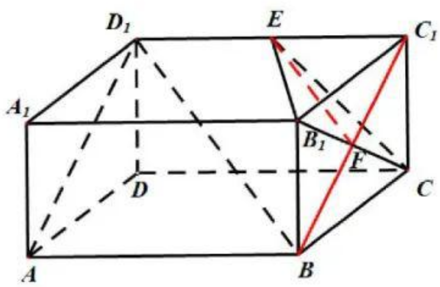
19. (12 分)

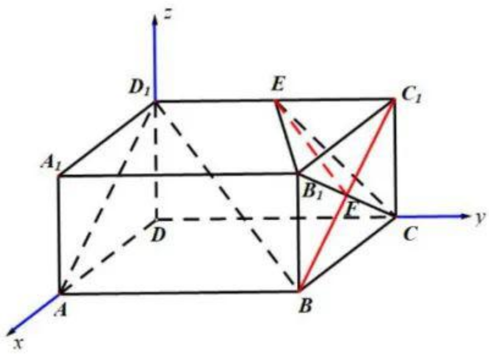
如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD=AB=2$，$AA_1=1$，E为D_1C_1的中点.

（1）在图中画出平面ABD_1与平面B_1EC的交线(不必说明画法和理由)；

（2）证明：$BD_1//$平面B_1EC；

（3）求平面ABD_1与平面B_1EC夹角的余弦值.





解：

（1）连BC_1，记$BC_1\cap B_1C=F$，连EF，则EF，即为平面ABD_1与平面B_1EC的交线，如图所示.

（2）在矩形BCC_1B_1中，F为BC_1中点，

又E为D_1C_1中点，所以$EF//BD_1$，$BD_1\not\subset$平面B_1EC，

$EF\subset$平面B_1EC，故$BD_1//$平面B_1EC.

（3）在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，以D为坐标原点，

分别以$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$为x轴，y轴，z轴建立如图所示的

空间直角坐标系，则$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$D_1(0,0,1)$，

$B_1(2,2,1)$，$E(0,1,1)$，$C(0,2,0)$.

设平面ABD_1的法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\vec{m}\perp\overrightarrow{AB}$，且$\vec{m}\perp\overrightarrow{AD_1}$，所以

$\begin{cases} y=0 \\ -2x+z=0 \end{cases}$，取 $x=1$，得平面 ABD_1 的一个法向量 $\vec{m}=(1,0,2)$.

设平面 B_1EC 的法向量 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\vec{n}\perp\overrightarrow{CB_1}$，且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{CE}$，所以

$\begin{cases} 2x_1+z_1=0 \\ -y_1+z_1=0 \end{cases}$，取 $x_1=1$，得平面 B_1EC 的一个法向量 $\vec{n}=(1,-2,-2)$.

记平面 ABD_1 与平面 B_1EC 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|1+0-4|}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以平面 ABD_1 与平面 B_1EC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=ax^3-3x+1$.

（1）$a=1$ 时，判断函数 $f(x)$ 的零点个数；

（2）若 $f(x)\geq 0$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 恒成立，求 a 的值.

解：

（1）$a=1$ 时，$f(x)=x^3-3x+1$，求导得 $f'(x)=3x^2-3$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		极大值		极小值	

$f(x)_{极大}=f(-1)=3>0$，$f(x)_{极小}=f(1)=-1<0$.

又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.

所以由函数的零点存在定理知，$f(x)$ 有 3 个不同的零点.

（2）当 $x=0$ 时，$a\in\mathbf{R}$；

当 $x>0$ 时，$f(x)\geq 0\Leftrightarrow ax^3\geq 3x-1\Leftrightarrow a\geq-\left(\frac{1}{x}\right)^3+3\left(\frac{1}{x}\right)^2$，$0<x\leq 1$；

当 $x<0$ 时，$f(x)\geq 0\Leftrightarrow ax^3\geq 3x-1\Leftrightarrow a\leq-\left(\frac{1}{x}\right)^3+3\left(\frac{1}{x}\right)^2$，$-1\leq x<0$.

记 $g(x)=-x^3+3x^2$，下面只需求 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 的最大值和 $(-\infty,-1]$ 的最小值.

$g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$，令$g'(x)=0$得$x=0$或$x=2$.

当x变化时，$g'(x)$，$g(x)$变化情况列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		极小值		极大值	

所以当$x\ge1$时，$g(x)_{\max}=g(x)_{极大值}=g(2)=4$，

当$x\le-1$时，$g(x)_{\min}=g(-1)=4$.

所以$a\ge-\left(\frac{1}{x}\right)^3+3\left(\frac{1}{x}\right)^2$，$0<x\le1\Leftrightarrow a\ge4$，

$a\le-\left(\frac{1}{x}\right)^3+3\left(\frac{1}{x}\right)^2$，$-1\le x<0\Leftrightarrow a\le4$.

综上所述，$a=4$.

21．(12分)

已知圆心在x轴上的圆C过点$(0,0)$和$(-1,1)$.

（1）求圆C的方程.

（2）由圆D：$(x-4)^2+y^2=4$上的动点P向圆C作两条切线分别交y轴于A，B两点，求$|AB|$的取值范围.

解：

（1）**方法一**：设圆C的方程为：$(x-a)^2+y^2=r^2\ (r>0)$，

因为圆C过点$(0,0)$和$(-1,1)$，所以$\begin{cases}a^2=r^2,\\(-1-a)^2+1^2=r^2.\end{cases}$

解得$a=-1$，$r=1$.

所以圆C的方程为$(x+1)^2+y^2=1$.

方法二：设$O(0,0)$，$A(-1,1)$，

依题意得，圆C的圆心为线段OA的垂直平分线l与x轴的交点C.

因为直线l的方程为$y-\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$，即$y=x+1$，所以圆心$C$的坐标为$(-1,0)$.

所以圆C的方程为$(x+1)^2+y^2=1$.

（2）**方法一**：设圆D上的动点P的坐标为(x_0,y_0)，则$(x_0-4)^2+{y_0}^2=4$，

即${y_0}^2=4-(x_0-4)^2\ge0$，解得$2\le x_0\le6$.

由圆C与圆D的方程可知，过点P向圆C所作两条切线的斜率必存在，

设 PA 的方程为：$y-y_0=k_1(x-x_0)$，则点 A 的坐标为 $(0,y_0-k_1x_0)$，

同理可得点 B 的坐标为 $(0,y_0-k_2x_0)$，所以 $|AB|=|k_1-k_2|x_0$，

因为 PA，PB 是圆 C 的切线，所以 k_1，k_2 满足 $\dfrac{|-k+y_0-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

即 k_1，k_2 是方程 $(x_0^2+2x_0)k^2-2y_0(x_0+1)k+y_0^2-1=0$ 的两根，即 $\begin{cases}k_1+k_2=\dfrac{2y_0(x_0+1)}{x_0^2+2x_0},\\ k_1k_2=\dfrac{y_0^2-1}{x_0^2+2x_0}.\end{cases}$ 所以 $|AB|=|k_1-k_2|x_0=x_0\sqrt{\left[\dfrac{2y_0(x_0+1)}{x_0^2+2x_0}\right]^2-\dfrac{4(y_0^2-1)}{x_0^2+2x_0}}$.

因为 $y_0^2=4-(x_0-4)^2$，所以 $|AB|=2\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{5x_0-6}{(x_0+2)^2}}$.

设 $f(x_0)=\dfrac{5x_0-6}{(x_0+2)^2}$，则 $f'(x_0)=\dfrac{-5x_0+22}{(x_0+2)^3}$．由 $2\le x_0\le 6$，可知 $f(x_0)$ 在 $\left[2,\dfrac{22}{5}\right)$ 上是增函数，在 $\left(\dfrac{22}{5},6\right]$ 上是减函数，所以 $[f(x_0)]_{\max}=f\left(\dfrac{22}{5}\right)=\dfrac{25}{64}$，

$[f(x_0)]_{\min}=\min\{f(2),f(6)\}=\min\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{8}\right\}=\dfrac{1}{4}$，所以 $|AB|$ 的取值范围为 $\left[\sqrt{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right]$.

方法二：设圆 D 上的动点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $(x_0-4)^2+y_0^2=4$，

即 $y_0^2=4-(x_0-4)^2\ge 0$，解得 $2\le x_0\le 6$．设点 $A(0,a)$，$B(0,b)$，

则直线 PA：$y-a=\dfrac{y_0-a}{x_0}x$，即 $(y_0-a)x-x_0y+ax_0=0$，

因为直线 PA 与圆 C 相切，所以 $\dfrac{|a-y_0+ax_0|}{\sqrt{(y_0-a)^2+x_0^2}}=1$，

化简得 $(x_0+2)a^2-2y_0a-x_0=0$．　　①

同理得 $(x_0+2)b^2-2y_0b-x_0=0$，　　②

由①②知 a，b 为方程 $(x_0+2)x^2-2y_0x-x_0=0$ 的两根，即 $\begin{cases}a+b=\dfrac{2y_0}{x_0+2},\\ ab=\dfrac{-x_0}{x_0+2}.\end{cases}$

所以 $|AB|=|a-b|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{\left(\dfrac{2y_0}{x_0+2}\right)^2+\dfrac{4x_0}{x_0+2}}=\sqrt{\dfrac{4y_0^2+4x_0(x_0+2)}{(x_0+2)^2}}$.

因为 $y_0^2=4-(x_0-4)^2$，所以 $|AB|=2\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{5x_0-6}{(x_0+2)^2}}=2\sqrt{2}\sqrt{-\dfrac{16}{(x_0+2)^2}+\dfrac{5}{x_0+2}}$.

令$t=\dfrac{1}{x_0+2}$，因为$2\le x_0\le 6$，所以$\dfrac{1}{8}\le t\le\dfrac{1}{4}$.

所以$|AB|=2\sqrt{2}\sqrt{-16t^2+5t}=2\sqrt{2}\sqrt{-16\left(t-\dfrac{5}{32}\right)^2+\dfrac{25}{64}}$，

当$t=\dfrac{5}{32}$时，$|AB|_{\max}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$，当$t=\dfrac{1}{4}$时，$|AB|_{\min}=\sqrt{2}$.

所以$|AB|$的取值范围为$\left[\sqrt{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right]$.

22. (12 分)

已知函数$f(x)=a\ln x-x+\dfrac{1}{x}$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）证明：$\ln(n+1)<\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

解：

（1）由题意知，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=a\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{-1}{x^2}=-\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}$，$x>0$.

(Ⅰ)当$a\le 0$时，$f'(x)<0$，$x>0$，此时$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

(Ⅱ)当$a>0$时，$\Delta=a^2-4$.

①当$0<a\le 2$时，$\Delta\le 0$，$f'(x)<0$，$x>0$，此时$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

②当$a>2$时，$\Delta>0$，令$f'(x)=0$，得$x_1=\dfrac{a-\sqrt{\Delta}}{2}$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{\Delta}}{2}$.

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况列表如下：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		极大值		极小值	

综上所述，当$a\le 2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

当$a>2$时，$f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$单调递减，在(x_1,x_2)单调递增.

（2）由（1）知，当$a=2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，此时$f(x)<f(1)=0$，即

$2\ln x-x+\dfrac{1}{x}<0$，$x>1$，故$2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$，$x>1$.

下证 $\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，$n\in\mathrm{N}^*$.

因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n(n+1)}}=\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}-\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$，$\ln\dfrac{n+1}{n}=2\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$，

用 $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$ 替换 x 得 $\ln\dfrac{n+1}{n}=2\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}<\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}-\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，$n\in\mathrm{N}^*$.

故 $\ln\dfrac{2}{1}+\ln\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，整理得

$\ln(n+1)<\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，$n\in\mathrm{N}^*$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。