

陕西师大附中 2022—2023 学年度第二学期

期末考试 高二年级 数学(理)试题 参考答案

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	C	D	A	C	B	C	D	B	A

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 把答案填在答题纸中相应的横线上.)

13. 3. 14. 4. 15. 4. 16. $(0, \frac{4}{e^2})$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 【详解】(1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} = 1$. 所以

$$c(a+c) + b(a+b) = (a+b)(a+c).$$

化简为 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$. 由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$. 由于 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $|\overline{CB} - \overline{CA}| = |\overline{AB}| = 4$, 即 $c = 4$. 由 (1) 知: $A = \frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以 } \cos B + \cos C = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) + \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C + \frac{1}{2} \cos C = \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = ,$$

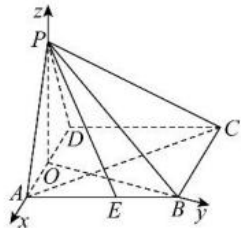
因为 $0 < C < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$, 所以 $C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$. 即 $\triangle ABC$ 为边长是 4 的等边三角形.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

18. 【详解】(1) 取 AD 的中点 O , 连接 OP, OB, BD, OE , $\because$ 底面 $ABCD$ 为菱形, 则 $AC \perp BD$, 又 $\because O, E$ 分别为 AD, AB 的中点, 则 $OE \parallel BD$, 故 $AC \perp OE$, 注意到 $AC \perp PE$, $OE \cap PE = E, OE, PE \subset$ 平面 POE , 则 $AC \perp$ 平面 POE , $\because OE \subset$ 平面 POE , 则 $AC \perp OE$, 又 $\because PA = PD$, E 为棱 AB 的中点, 则 $AD \perp OE$, $AC \cap AD = A, AC \cap AD = A, AC, AD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore OP \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PO \subset$ 平面 PAD , 故平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 若 $PA = AD$, $\angle BAD = 60^\circ$, 则 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 且 O 为 AD 的中点, 故 $OB \perp AD$, 由 (1) 得, 如图所示建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 设 $AD = 2$, 则

$$P(0, 0, \sqrt{3}), E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), D(-1, 0, 0), \text{ 可得 } \overrightarrow{DP} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{DE} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \text{ 设平}$$





面 PDE 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = x + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \end{cases}$$

取 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = -3$, $z = -1$, 所以 $\vec{n} = (\sqrt{3}, -3, -1)$, 取平面 PDA 的法向量 $\vec{m} = (0, 1, 0)$, 则

$$\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \text{ 设二面角 } E-PD-A \text{ 为 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } \cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \text{ 可得}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \text{ 所以二面角 } E-PD-A \text{ 的正弦值为 } \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

19. 【详解】(1) 依题意, $\bar{x} = (55 \times 0.011 + 65 \times 0.02 + 75 \times 0.034 + 85 \times 0.028 + 95 \times 0.007) \times 10 = 75$, 所以抽取的 200 名学生的平均成绩 $\bar{x} = 75$.

(2) 由于第五组总共要抽取 7 人, 高三学生占 $\frac{3}{7}$, 所以抽到的高三学生应该有 $7 \times \frac{3}{7} = 3$ 人,

所以由古典概型可得这 2 人都是高三学生的概率 $P = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

(3) 依题意,

$$s = \sqrt{(55-75)^2 \times 0.11 + (65-75)^2 \times 0.2 + (75-75)^2 \times 0.34 + (85-75)^2 \times 0.28 + (95-75)^2 \times 0.07}$$

$$= \sqrt{44 + 20 + 0 + 28 + 28} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30} \approx 11, \text{ 所以优秀的比赛成绩应该 } x > \bar{x} + s = 75 + 11 = 86,$$

而比赛成绩在 $[86, 100]$ 的频率为: $(90-86) \times 0.028 + 0.007 \times 10 = 0.182$, 而 $1500 \times 0.182 = 273$,

故参赛的 1500 名学生成绩优秀的人数为 273 人.

20. 【详解】(1) 不妨设点 P 在 x 轴的上方, 由椭圆的性质可知 $|OA| = a$.

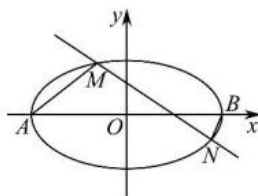
$\because \triangle APO$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形, $\therefore P\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $\frac{\left(-\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{b^2} = 1$, 整

理得 $a^2 = 3b^2$. $\therefore \triangle APO$ 的面积为 1 , $\therefore \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 1$, $\therefore a^2 = 4$, $\therefore b^2 = \frac{4}{3}$. 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = 1$.

(2) 设直线 AM 的斜率为 k_1 , 直线 BN 的斜率为 k_2 , $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $x = my + 1$.

不妨设 $y_2 < 0 < y_1$, 则 $k_1 = \tan \angle MAB$, $k_2 = \tan \angle NBA$. 联立
$$\begin{cases} x = my + 1, \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$$

可得 $(m^2 + 3)y^2 + 2my - 3 = 0$,





$\Delta = 16m^2 + 36 > 0$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 3}$, $y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 + 3}$, $\therefore \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{2m}{3}$, 即 $2my_1 y_2 = 3(y_1 + y_2)$,

$$\therefore \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 + 2}}{\frac{y_2}{x_2 - 2}} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{x_2 - 2}{y_2} = \frac{y_1(my_2 - 1)}{(my_1 + 3)y_2} = \frac{my_1 y_2 - y_1}{my_1 y_2 + 3y_2} = \frac{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - y_1}{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) + 3y_2} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1 + \frac{9}{2}y_2} = \frac{1}{3},$$

$\therefore 3k_1 = k_2$, 故 $3\tan \angle MAB = \tan \angle NBA$ 得证.

21. 【详解】(1) 令 $g(x) = xf(x) + x^2 - \frac{2(x-1)}{x+1} = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$, $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 则

$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $g(1) = 0$, 所以当 $x \geq 1$ 时,

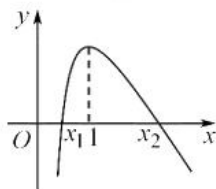
$g(x) \geq 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < 0$,

所以原不等式的解集为 $[1, +\infty)$.

(2) 证明: $f'(x) = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2}$, 令 $h(x) = 1 - \ln x - x^2$, 易知 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $h(1) = 0$.

当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \geq 1$ 时, $h(x) \leq 0$, 此时 $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = a - 1$. 因为函数 $f(x)$ 存在两个不同的零点 x_1, x_2 , 所以 $a - 1 > 0$, 即 $a > 1$, 由图可知 $0 < x_1 < 1 < x_2$,



由题意知 $f(x_1) = \frac{\ln x_1}{x_1} - x_1 + a = 0$, $f(x_2) = \frac{\ln x_2}{x_2} - x_2 + a = 0$, 所以 $\ln x_1 = x_1^2 - ax_1$, $\ln x_2 = x_2^2 - ax_2$,

两式相减得 $a = x_1 + x_2 + \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_1 - x_2}$. 所以 $\ln x_1 + \ln x_2 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 > 2 + a$ 等价于

$$(x_1 - x_2)(\ln x_1 + \ln x_2) + (x_1 - x_2)x_1 x_2 - 2(x_1 - x_2) + \ln x_1 - \ln x_2 < 0,$$

也等价于 $(x_1 + 1)\ln x_1 - (x_2 + 1)\ln x_2 + x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 + (x_1 - x_2)x_1 x_2 - 2(x_1 - x_2) < 0$.

因为 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 所以由(1)的解题过程知 $(x_1 + 1)\ln x_1 < 2(x_1 - 1)$ ① $-(x_2 + 1)\ln x_2 < 2(1 - x_2)$

②

因为 $\frac{\ln x_1}{x_1} - x_1 + a = \frac{\ln x_2}{x_2} - x_2 + a$, 所以 $\frac{x_2 \ln x_1 - x_1 \ln x_2}{x_1 x_2} = x_1 - x_2$, 即 $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 = x_1 x_2 (x_2 - x_1)$

③



①+②+③得 $(x_1+1)\ln x_1 - (x_2+1)\ln x_2 + x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 + (x_1-x_2)x_1x_2 - 2(x_1-x_2) < 0$,

所以 $\ln x_1 + \ln x_2 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 2+a$.

22. 【详解】(1) 由 $\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 12$ 可得, $x^2 + 3y^2 = 12$, 即 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

设点 $P(x, y)$, 则 $x = 2 \times \cos \pi = -2$, $y = 2 \times \sin \pi = 0$, 即点 $P(-2, 0)$,

∴ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数)

(2) 将直线 l 的参数方程代入 $x^2 + 3y^2 = 12$ 得, $(1 + 2 \sin^2 \alpha)t^2 - 4t \cos \alpha - 8 = 0$,

$\Delta = 48 + 48 \sin^2 \alpha > 0$ 恒成立, 设点 A 对应的参数为 t_1 , 点 B 对应的参数为 t_2 ,

$$\begin{aligned} \text{则 } t_1 + t_2 &= \frac{4 \cos \alpha}{1 + 2 \sin^2 \alpha}, \quad t_1 t_2 = \frac{-8}{1 + 2 \sin^2 \alpha} < 0, \text{ 则 } \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} \\ &= \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 t_2|} = \frac{\sqrt{3 + 3 \sin^2 \alpha}}{2} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right]. \end{aligned}$$

23. 【详解】(1) 由题意知 $f(x) = |x+1| - |x-5| = \begin{cases} -6, & x \leq -1, \\ 2x-4, & -1 < x < 5, \\ 6, & x \geq 5. \end{cases}$ 当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = -6$, 不等式

$f(x) > 3$ 不成立; 当 $-1 < x < 5$ 时, 令 $2x-4 > 3$, 解得 $x > \frac{7}{2}$, 所以 $\frac{7}{2} < x < 5$;

当 $x \geq 5$ 时, $f(x) = 6$, 不等式 $f(x) > 3$ 恒成立. 综上所述, 不等式 $f(x) > 3$ 的解集为 $\left\{ x \mid x > \frac{7}{2} \right\}$.

(2) 证明: 由 (1) 知 $f(x)_{\max} = 6$, 所以 $a+b=6$.

因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2 \right) \geq \frac{1}{6} \times \left(\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} + 2 \right) = \frac{2}{3}$, 当且仅当 $a=b=3$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{2}{9}$, 当且仅当 $a=b=3$ 时取等号. 故有 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{9}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线