高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|\log_3 x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x<a\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是

A. $[3,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

2. 设复数 z 满足 $1-3z=iz$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角的大小等于

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

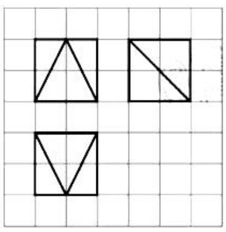
4. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，P 是 C 上一点，若点 P 的纵坐标为2，且 $|PF|=2$，则 $p=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 若 $(x+2)^n=x^n+\cdots+ax^3+bx^2+cx+2^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$，且 $3a=2b$，则 n 的值为

A. 4　　B. 6　　C. 12　　D. 18

6. 如图是某几何体的三视图，图中小方格的边长为1，则该几何体的体积为



A. $\frac{22}{3}$　　B. $\frac{17}{3}$　　C. 6　　D. $\frac{20}{3}$

7. 碳-14测年法是由美国科学家马丁·卡门与同事塞缪尔·鲁宾于1940年发现的一种测定含碳物质年龄的方法，在考古中有大量的应用. 其原理为：宇宙射线中的中子与氮-14反应产生碳-14，而碳-14会发生衰变变成氮-14，由此构建一个核素平衡. 空气中的碳-14与氧反应生成的二氧化碳被生物圈接收，活体生物体内的碳-14和碳-12浓度比例是一定的，只有当生物死亡后，碳循环中断，碳-14会衰

变并逐渐消失．放射性元素的衰变满足规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$（表示的是放射性元素在生物体中最初的含量 N_0 与经过时间 t 后的含量 N 间的关系，其中 $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$（T 为半衰期））．已知碳-14 的半衰期为 5 730 年，$N_0=1.2\times10^{-12}$，经测量某地出土的生物化石中碳-14 含量为 4×10^{-13}，据此推测该化石活体生物生活的年代距今约（结果保留整数，参考数据 $\log_2 3\approx1.585$）

A. 7 650 年　　B. 8 890 年

C. 9 082 年　　D. 10 098 年

8. 倾斜角为 45°的直线 l 将圆 $C:x^2+y^2=4$ 分割成弧长的比值为 $\frac{1}{2}$ 的两段弧，则直线 l 在 y 轴上的截距为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. ±1　　D. $\pm\sqrt{2}$

9. 给出下列四种图象的变换方法：

①将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；②将图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；

③将图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度；④将图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度．

利用上述变换中的某些方法，能由函数 $y=\sin 4x$ 的图象得到函数 $y=-2\sin 2x\cos 2x$ 的图象的变换方法是

A. ①②　　B. ②③　　C. ①④　　D. ③④

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp CB$，其外接球的体积为 36π，若 $AC=x$，$BC=y$，$AP=z$，则 $xy+yz+zx$ 的最大值为

A. 36　　B. 32　　C. 24　　D. 12

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $3S_n=64-a_n$，若 $a_m\cdot a_k=1$（$1\leqslant m<k$，$m,k\in\mathbf{N}^*$），则 k 的取值集合是

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{4,5\}$　　D. $\{3,4,5\}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x-x^2+\pi x$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，则满足 $f(\pi-a)>f\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$ 的实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$　　D. $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的图象在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为________．

14. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant0,\\x-y-1\geqslant0,\\2x-6y-3\leqslant0,\end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最大值为________．

15. "杨辉三角"是二项式系数在三角形中的一种几何排列．在欧洲，这个表叫做帕斯卡三角形．帕斯卡（1623～1662）是在 1654 年发现这一规律的，比杨辉要迟 393 年．"杨辉三角"是中国古代数学的杰出研究成果之一，它把二项式系数图形化，把组合数内在的一些代数性质直观地从图形中体现出来．下面数表类似"杨辉三角"，从上到下分别为第 1 行、第 2 行、第 3 行、…、第 n 行、…．它满足：①第 n 行首尾的数均为 n；②第 $n(n\geqslant3)$ 行除首尾的数外，每一个数都等于它肩上（即第 $n-1$ 行）两个数之和．记第 $n(n\geqslant2)$ 行的第二个数为 $f(n)$，则 $f(60)=$________．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 4 & & 3 & \\ 4 & & 7 & & 7 & & 4 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots\end{array}$$

16. 已知曲线 C：$\frac{x|x|}{4}+y|y|=1$，点 $P(m,n)$ 为曲线 C 上任意一点，若点 $A(-2,1)$，$B(4,-2)$，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\sin(A+B)=c\sin\frac{B+C}{2}$.

（1）求角 A 的大小；

（2）若角 B 为钝角，求$\frac{b}{c}$的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

德、智、体、美、劳是对人的素质定位的基本准则，也是人类社会教育的趋向目标，所以人类社会的教育就离不开德、智、体、美、劳这个根本. 随着国家对体育、美育的高度重视，不少省份已经宣布将体育、美育纳入中考范畴. 在近期召开的教育部新闻发布会上，教育部体育卫生与艺术教育司司长透露，目前全国已有 4 个省份开展美育中考计分，同时还有 6 个省份、12 个地市开始（启动）了中考美育计分，分值在 10 分到 40 分之间. 到 2022 年力争全覆盖，全面实行美育中考. 同时，为体育、美育纳入高考做好前期准备工作. 某学校为了提升学生的体育水平，决定本学期开设足球课，某次体育课上，体育器材室的袋子里有大小，形状相同的 2 只黄色足球和 3 只白色足球，现从袋子里依次随机取球.

（1）若有放回地取 3 次，每次取一个球，求取出 1 个黄色足球 2 个白色足球的概率；

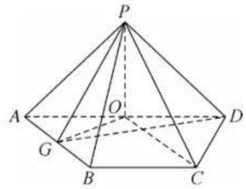
（2）若无放回地取 3 次，每次取一个球，若取出每只黄色足球得 1 分，取出每只白色足球不得分，求得分 X 的分布列和数学期望.

19.（本小题满分 12 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，$AD/\!/BC$，$AD\perp CD$，且 $AD=2BC=2CD=4$，$PA=PD=2\sqrt{2}$，AD，AB 的中点分别是 O，G.

（1）求证：$GO\perp$平面 POC；

（2）求二面角 $D-PG-O$ 的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，短轴长等于焦距，且经过点 $P(0,1)$.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与 E 交于 A，B 两点，若以 AB 为直径的圆与 y 轴交于点 M，且 $|MA|=|MB|$，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{2a}{x}-\ln x+2(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的极值；

(2)设 $g(x)=f(x)+2a\ln x+x$，若 $g(x)$ 有三个零点，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

已知曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=4-t,\\ y=\frac{t}{3}\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(1)求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

(2)设 C_1 与 C_2 交于 A，B 两点，点 $P(4,0)$，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|2x-5|+|2x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 10$ 的解集；

(2)若 $-x^2+2x-1+a\leqslant f(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由 $\log_3 x\leqslant 1$，得 $0<x\leqslant 3$，即 $A=\{x|0<x\leqslant 3\}$. 又 $B=\{x|0<x<a\}$，且 $A\subseteq B$，所以实数 a 的取值范围是 $(3,+\infty)$. 故选 B.

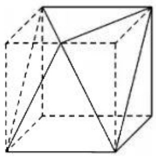
2. A　法一：由 $1-3z=\mathrm{i}z$，得 $1=(3+\mathrm{i})z$，所以 $z=\frac{1}{3+\mathrm{i}}=\frac{3-\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(-\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故选 A. 法二：由题知 $z=\frac{1}{3+\mathrm{i}}$，所以 $|z|=\frac{1}{|3+\mathrm{i}|}=\frac{1}{\sqrt{3^2+1}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

3. A　由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=1$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+(\sqrt{2})^2=3$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为 $30°$. 故选 A.

4. B　设 $P(x_0,2)$，由 $\begin{cases}x_0+\frac{p}{2}=2,\\ 2^2=2px_0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=2,\\ x_0=1.\end{cases}$ 故选 B.

5. B　根据二项展开式的通项公式，得 $a=\mathrm{C}_n^3\cdot 2^{n-3}$，$b=\mathrm{C}_n^2\cdot 2^{n-2}$. 由 $3a=2b$，得 $3\mathrm{C}_n^3\cdot 2^{n-3}=2\mathrm{C}_n^2\cdot 2^{n-2}$，即 $3\mathrm{C}_n^3=4\mathrm{C}_n^2$，亦即 $3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=4\times\frac{n(n-1)}{2}$，解得 $n=6$. 故选 B.

6. D　由三视图知该几何体为正方体截去了两个相同的三棱锥(如图)，所以该几何体的体积为 $2\times2\times2-2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times2=8-\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$. 故选 D.



7. C　由题意知 $t=\frac{T\cdot\ln\frac{N_1}{N}}{\ln 2}=\frac{5\,730\times\ln\frac{1.2\times10^{-12}}{4\times10^{-13}}}{\ln 2}=\frac{5\,730\ln 3}{\ln 2}=5\,730\log_2 3\approx5\,730\times1.585=9\,082.05\approx9\,082$. 故选 C.

8. D　设原点为 O，直线 l 与圆 C 交于点 A、B，由题意，得 $\angle AOB=120°$. 过 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H，则 $|OH|=1$；设直线 l 的方程为 $y=x+b$，由 $|OH|=1$，得 $\frac{|b|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $b=\pm\sqrt{2}$，所以直线 l 在 y 轴上的截距为 $\pm\sqrt{2}$. 故选 D. 也可以运用数形结合，直观求解.

9. A　$y=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$. 因为 $\sin 4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin(4x-\pi)=-\sin 4x$，所以①适合；因为 $\sin 4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(4x+\pi)=-\sin 4x$，所以②适合；因为 $\sin 4\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos 4x$，所以③不适合；因为 $\sin 4\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos 4x$，所以①不适合. 故选 A.

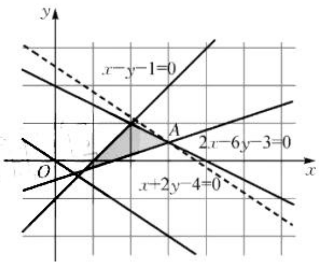
10. A　设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，则 $\frac{4\pi R^3}{3}=36\pi$，所以 $R=3$，又 $2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所以 $x^2+y^2+z^2=36$，所以 $xy+yz+zx\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}=x^2+y^2+z^2=36$，当且仅当 $x=y=z=2\sqrt{3}$ 时，等号成立. 故选 A.

11. C　当 $n=1$ 时，$3a_1=64-a_1$，解得 $a_1=16$；当 $n\geqslant 2$ 时，$3S_n=64-a_n$ 和 $3S_{n-1}=64-a_{n-1}$ 两式相减，得 $3a_n=a_{n-1}-a_n$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{4}$，则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 16、公比为 $\dfrac{1}{4}$ 的等比数列，即各项依次为 $16,4,1,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{64},\cdots$，所以 $a_1a_5=1$，$a_2a_4=1$，$a_3=1$，结合 $1\leqslant m<k$，得 k 的取值集合是 $\{4,5\}$. 故选 C.

12. B　函数 $y=\sin x$ 和 $y=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{\pi^2}{4}$ 的图象在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上都关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，且它们都在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，则函数 $f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{\pi^2}{4}$ 的图象在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，且在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减. 由 $f(\pi-a)>f\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right)$，得 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\pi-a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\\left|\pi-a-\dfrac{\pi}{2}\right|<\left|\dfrac{\pi}{2}+a-\dfrac{\pi}{2}\right|,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\-\pi\leqslant a\leqslant\pi,\\\left|\dfrac{\pi}{2}-a\right|<|a|,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{\pi}{4}<a\leqslant\pi$. 故选 B.

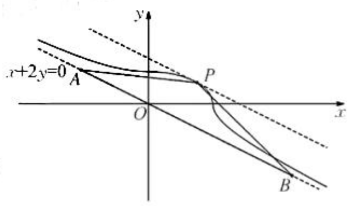
13. $2x-y-e=0$　因为 $f(e)=e$，$f'(x)=\ln x+1$，则 $f'(e)=2$，所以所求切线方程为 $y-e=2(x-e)$，即 $2x-y-e=0$.

14. $\dfrac{15}{2}$　画出可行域（如图阴影部分），当直线 $2x+3y=z$ 过点 $A\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，z 取得最大值，所以 $z_{\max}=2\times3+3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}$.



15. 1 771　$f(3)-f(2)=2$，$f(4)-f(3)=3$，$f(5)-f(4)=4$，$\cdots$，$f(n)-f(n-1)=n-1$，以上 $n-2$ 个式子左右分别相加，得 $f(n)-f(2)=2+3+4+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-2)(n-1+2)}{2}=\dfrac{n^2-n-2}{2}$，所以 $f(n)=\dfrac{n^2-n+2}{2}$，于是 $f(60)=1\ 771$.

16. $3\sqrt{2}$　曲线 C 是由 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$、$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1(x>0,y<0)$ 以及 $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1(x<0,y>0)$ 三部分构成（如图所示），$|AB|=\sqrt{(4+2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，且过 AB 的直线方程为 $x+2y=0$，并且直线 $x+2y=0$ 为双曲线 $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$ 和 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线. 设过点 P 且与直线 $x+2y=0$ 平行的直线方程为 $x+2y+t=0$，由图知，当直线 $x+2y+t=0(t<0)$ 与曲线 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$ 相切时，切点到直线 $x+2y=0$ 距离最大，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\x+2y+t=0,\end{cases}$ 消



去 x 得 $8y^2+4ty+t^2-4=0$，$\Delta=16t^2-4\times8(t^2-4)=0$，解得 $t=-2\sqrt{2}$（正根舍），所以 $x+2y-2\sqrt{2}=0$，所以点 P 到直线 $x+2y=0$ 的最大距离即为直线 $x+2y=0$ 与直线 $x+2y-2\sqrt{2}=0$ 之间的距离，所以最大距离 $d=\frac{|2\sqrt{2}|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，

所以△PAB 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=3\sqrt{2}$.

17. 解：(1)因为 $a\sin(A+B)=c\sin\frac{B+C}{2}$，所以 $a\sin C=c\cos\frac{A}{2}$，…… 2 分

由正弦定理，得 $\sin A\sin C=\sin C\cos\frac{A}{2}$. …… 4 分

由 $0<C<\pi$，得 $\sin C\neq0$，所以 $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}$，因为 $\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …… 6 分

(2)由 B 为钝角，得 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\ B=\pi-\frac{\pi}{3}-C>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $0<C<\frac{\pi}{6}$，从而 $0<\tan C<\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 8 分

由正弦定理，得 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin C}=\frac{\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C}{\sin C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=2$.

故 $\frac{b}{c}$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$. …… 12 分

18. 解：(1)从袋子里有放回地取 3 次球，相当于做了 3 次独立重复试验，每次试验取出黄色足球的概率为 $\frac{2}{5}$，取出白色足球的概率为 $\frac{3}{5}$，…… 2 分

设事件 A 为"取出 1 个黄色足球 2 个白色足球"，则 $P(A)=C_3^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$. …… 4 分

(2)X 的所有可能取值有三个：0，1，2. …… 6 分

则 $P(X=0)=\frac{A_3^3}{A_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1A_2^1A_3^2}{A_5^3}=\frac{6}{10}$，$P(X=2)=\frac{C_3^1A_2^2A_3^1}{A_5^3}=\frac{3}{10}$. …… 9 分

所以得分 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

…… 10 分

故得分 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. …… 12 分

19. (1)证明：连接 OB，BD，易证四边形 $OBCD$ 为正方形.

所以 $BD\perp OC$. …… 1 分

因为 AD，AB 的中点分别是 O，G，所以 $GO/\!/BD$.

所以 $GO\perp OC$. …… 2 分

因为 $PA=PD$，AD 的中点是 O，所以 $PO\perp AD$. …… 3 分

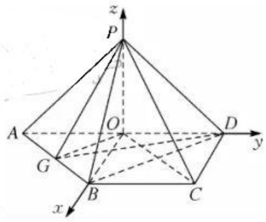
因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………………………………………………… 5 分

又 $GO,OC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp GO$，$PO\perp OC$，

又因为 $OC\cap PO=O$，所以 $GO\perp$ 平面 POC. …………………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)知 OB,OD,OP 两两垂直，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



因为 $AD=2BC=2CD=4$，$PA=PD=2\sqrt{2}$，

所以 $PO=OA=OB=OD=2$，

则点 $P(0,0,2)$，$D(0,2,0)$，$O(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$G(1,-1,0)$.

所以 $\overrightarrow{OG}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{DG}=(1,-3,0)$，$\overrightarrow{PG}=(1,-1,-2)$. ……………………… 7 分

由(1)知 $PO\perp OC$，$GO\perp OC$，又 $PO\cap GO=O$，$PO,GO\subset$ 平面 PGO，

所以 $OC\perp$ 平面 PGO，所以 $\overrightarrow{OC}=(2,2,0)$ 为平面 PGO 的一个法向量； ……………………… 8 分

又设平面 PGD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PG},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DG},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PG}=x-y-2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DG}=x-3y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}z=y,\\ x=3y,\end{cases}$

取 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(3,1,1)$. ………………………………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OC}|\,|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(2,2,0)\cdot(3,1,1)}{2\sqrt{2}\times\sqrt{11}}=\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$.

由图知二面角 $B-PD-C$ 为锐角，

所以二面角 $D-PG-O$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$. ………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由椭圆 E 经过点 $P(0,1)$，得 $b=1$；

由短轴长等于焦距，得 $2b=2c$，则 $c=1$， ………………………………………………………… 2 分

所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

故椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $x=ty+1(t\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 得 $(t^2+2)y^2+2ty-1=0$，

由题意，得 $\Delta>0$，且 $y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{t^2+2}$， ……………………………………… 6 分

设 $M(0,u)$，线段 AB 的中点为 $N(x_0,y_0)$，则 $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{t}{t^2+2}$，$x_0=ty_0+1=\dfrac{2}{t^2+2}$.

由 $|MA|=|MB|$，得 $MN\perp AB$，即 $\dfrac{u+\frac{t}{t^2+2}}{-\frac{2}{t^2+2}}\cdot\dfrac{1}{t}=-1$，解得 $u=\dfrac{t}{t^2+2}$. ……………………… 8 分

由 $MA\perp MB$，得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_1x_2+(y_1-u)(y_2-u)=(ty_1+1)(ty_2+1)+(y_1-u)(y_2-u)=(t^2+1)y_1y_2+$
$(t-u)(y_1+y_2)+u^2+1=0$，

即$(t^2+1)\cdot\frac{-1}{t^2+2}+\left(t-\frac{t}{t^2+2}\right)\cdot\frac{-2t}{t^2+2}+\left(\frac{t}{t^2+2}\right)^2+1=0$, ……………… 10 分

解得 $t=\pm1$，所以直线 l 的方程为 $x=\pm y+1$，即 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$. ……………… 12 分

21. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{2a}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{2a+x}{x^2}$, ……………… 1 分

当 $a\geqslant0$ 时，$2a\geqslant0$，$x>0$，则 $2a+x>0$，则 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无极值；……………… 2 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x>-2a$；令 $f'(x)>0$，得 $0<x<-2a$.

故 $f(x)$ 在 $(0,-2a)$ 上单调递增，在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $x=-2a$ 处取得极大值 $1-\ln(-2a)$，无极小值. ……………… 4 分

(2) 由题意，$g(x)=f(x)+2a\ln x+x=\frac{2a}{x}-\ln x+2+2a\ln x+x=(2a-1)\ln x+\frac{2a}{x}+x+2$,

$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$g'(x)=\frac{2a-1}{x}-\frac{2a}{x^2}+1=\frac{x^2+(2a-1)x-2a}{x^2}=\frac{(x-1)(x+2a)}{x^2}\ (x>0)$. ……………… 5 分

①若 $a\geqslant0$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 至多有两个零点，不合题意；……………… 6 分

②若 $a=-\frac{1}{2}$，则 $x\in(0,+\infty)$，$g'(x)\geqslant0$（仅 $g'(1)=0$），$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意；……………… 7 分

③若 $-\frac{1}{2}<a<0$，则 $0<-2a<1$，当 $x\in(0,-2a)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,-2a)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增；当 $x\in(-2a,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-2a,1)$ 上单调递减，要使 $g(x)$ 有三个零点，必须有 $\begin{cases}g(-2a)>0\\g(1)<0\end{cases}$ 成立.

若 $g(1)<0$，得 $a<-\frac{3}{2}$，这与 $-\frac{1}{2}<a<0$ 矛盾，所以 $g(x)$ 不可能有三个零点（由 $g(1)=2a+3>0$，所以 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意）；……………… 8 分

④若 $a<-\frac{1}{2}$，则 $-2a>1$. 当 $x\in(0,1)$ 或 $x\in(-2a,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$，$(-2a,+\infty)$ 上单调递增；当 $x\in(1,-2a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,-2a)$ 上单调递减，要使 $g(x)$ 有三个零点，必须有 $\begin{cases}g(1)>0\\g(-2a)<0\end{cases}$ 成立，

由 $g(1)>0$，得 $a>-\frac{3}{2}$，由 $g(-2a)=(2a-1)[\ln(-2a)-1]<0$ 及 $a<-\frac{1}{2}$，得 $a<-\frac{e}{2}$，

所以 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$.

并且当 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$ 时，$0<e^{-2}<1$，$e^2>-2a$，$g(e^{-2})=4+e^{-2}+2a(e^2-2)<4+e^{-2}-e(e^2-2)<4+1-5e<0$，

$g(e^2)=e^2+2a(e^{-2}+2)>e^2-3(e^{-2}+2)=e^2-6-3e^{-2}>e^2-7>0$. ……………… 11 分

综上所述，使 $g(x)$ 有三个零点的实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{e}{2}\right)$. ……………… 12 分

22. 解：(1)将$\begin{cases}x=4-t,\\ y=\dfrac{t}{3}\end{cases}$消去参数 t，得 $4-x=3y$，即 $x+3y-4=0$.

所以 C_1 的普通方程为 $x+3y-4=0$. ………… 2分

由 $\rho=4\sin\theta$，得 $\rho^2=4\rho\sin\theta$，

代入公式$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$得 $x^2+y^2=4y$，

即 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y=0$. ………… 5分

(2)曲线 C_1 的标准参数方程为$\begin{cases}x=4-\dfrac{3}{\sqrt{10}}t,\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}t.\end{cases}$ ………… 6分

代入 $x^2+y^2-4y=0$，得 $\left(4-\dfrac{3}{\sqrt{10}}t\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}t\right)^2-4\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}t=0$，化简得 $t^2-\dfrac{28}{\sqrt{10}}t+16=0$，

因为 $\Delta=\left(\dfrac{28}{\sqrt{10}}\right)^2-4\times16>0$，$t_1t_2=16$， ………… 8分

曲线 C_1 是过点 $P(4,0)$ 的一条直线，与曲线 C_2 交于 A，B 两点，

所以 $|PA|\cdot|PB|=t_1t_2=16$. ………… 10分

23. 解：(1)因为 $f(x)=\begin{cases}4-4x, x<-\dfrac{1}{2},\\ 6, -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2},\\ 4x-4, x>\dfrac{5}{2},\end{cases}$ ………… 2分

所以当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时，由 $f(x)\leqslant10$，得 $4-4x\leqslant10$，得 $-\dfrac{3}{2}\leqslant x<-\dfrac{1}{2}$；

当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$ 时，由 $f(x)\leqslant10$，得 $6\leqslant10$ 恒成立，故 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$；

当 $x>\dfrac{5}{2}$ 时，由 $f(x)\leqslant10$，得 $4x-4\leqslant10$，得 $\dfrac{5}{2}<x\leqslant\dfrac{7}{2}$.

综上，不等式 $f(x)\leqslant10$ 的解集为 $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2}\right]$. ………… 5分

(2)由 $-x^2+2x-1+a\leqslant f(x)$，得 $-(x-1)^2+a\leqslant f(x)$，得 $a\leqslant(x-1)^2+f(x)$. ………… 6分

因为 $f(x)\geqslant|(2x-5)-(2x+1)|=6$，当且仅当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$ 取等号，

所以当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 6. ………… 8分

所以当 $x=1$ 时，$(x-1)^2+f(x)$ 取得最小值 6. ………… 9分

故 $a\leqslant6$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,6]$. ………… 10分

关于我们