数学试题评分参考

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1．A　　2．B　　3．A　　4．D

5．C　　6．D　　7．C　　8．B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的给 5 分，部分选对的给 2 分，有选错的给 0 分。

9．BD　　10．ABD　　11．ABD　　12．ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．0.5　　14．$\sqrt{5}-1$

15．6，$\dfrac{47}{15}$　（第一空 2 分，第二空 3 分）　　16．5

四、解答题：共 70 分。

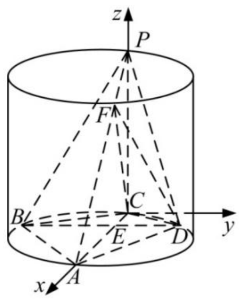
17．解：

（1）由题设得 $AC\perp BD$，$BD=2\sqrt{3}EC$，$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BD=3EC$，$AC=4EC$．于是

$$V_1=\pi\cdot(\frac{1}{2}AC)^2\cdot CP=4\pi\cdot EC^2\cdot CP,$$

$$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot CP=\frac{4\sqrt{3}}{3}EC^2\cdot CP.$$

所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\sqrt{3}\pi$．　　……4 分



（2）以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{CE}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$．

由（1）和题设得 $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{PF}{FA}=\dfrac{1}{3}$，所以 $\overrightarrow{CF}=(1,0,3)$，$\overrightarrow{CD}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,4)$．

设平面 FCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+3z=0, \\ x+\sqrt{3}y=0, \end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(-3,\sqrt{3},1)$.

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(p,q,r)$，则

$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4r=0, \\ p+\sqrt{3}q=0, \end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(-3,\sqrt{3},0)$. ……8 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

因此二面角 $F-CD-P$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. ……10 分

18．解：

（1）由题设，$f(x)$ 的最小正周期 $T\geqslant 2\times(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{2\pi}{3}$. 又因为 $f(\dfrac{\pi}{2})=f(\dfrac{2\pi}{3})$，所以 $x=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{3})=\dfrac{7\pi}{12}$ 为 $y=f(x)$ 图像的一条对称轴. ……5 分

（2）由（1）知 $T\geqslant\dfrac{2\pi}{3}$，故 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}\leqslant 3$. 由 $\omega\in\mathbf{N}^*$，得 $\omega=1$，2 或 3.

由 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的对称轴，所以 $\dfrac{7\pi}{12}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$.

因为 $f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k_2\pi$ 或 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2k_3\pi$，$k_2,k_3\in\mathbf{Z}$.

……8 分

若 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k_2\pi$，则 $\dfrac{5\pi}{12}\omega=\dfrac{\pi}{6}+(k_1-2k_2)\pi$，即 $\omega=\dfrac{2}{5}+\dfrac{12}{5}(k_1-2k_2)$. 不存在整数 k_1，k_2，使得 $\omega=1$，2 或 3.

若 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2k_3\pi$，则 $\dfrac{5\pi}{12}\omega=-\dfrac{\pi}{6}+(k_1-2k_3)\pi$，即 $\omega=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{12}{5}(k_1-2k_3)$. 不存在整数 k_1，k_3，使得 $\omega=1$ 或 3. 当 $k_1=2k_3+1$ 时，$\omega=2$.

此时 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k_3\pi$，由 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. ……12 分

19．**解：**

（1）由题设可得$a_2=a_1=1$．当$n\geqslant 2$时，$a_{n+1}=T_{n-1}+a_n=2a_n$，故$a_n=2^{n-2}$．故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2^{n-2}, & n\geqslant 2.\end{cases}$ ……5 分

（2）设$S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}$，则$S_1=1$，当$n\geqslant 2$时，

$S_n=1+2\cdot 2^0+\cdots+n\cdot 2^{2-n}$．故$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+2\cdot 2^{-1}+\cdots+n\cdot 2^{1-n}$．于是，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=\frac{5}{2}+(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{2-n})-n\cdot 2^{1-n}\\&=\frac{5}{2}+\frac{2^{-1}(1-2^{2-n})}{1-2^{-1}}-n\cdot 2^{1-n}.\end{aligned}$$

整理可得$S_n=7-(n+2)2^{2-n}$． ……10 分

故$S_n<7$，又$S_5=\dfrac{49}{8}>6$．所以符合题设条件的m的最小值为7． ……12 分

20．**解：**

（1）依题意X服从超几何分布，且$N=5\,000$，$M=200$，$n=500$，故

$E(X)=500\times\dfrac{200}{5000}=20$． ……4 分

（2）当$N<685$时，$P(X=15)=0$，

当$N\geqslant 685$时，$P(X=15)=\dfrac{C_{200}^{15}C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}$，

记$a(N)=\dfrac{C_{200}^{15}C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}$，则

$$\begin{aligned}\frac{a(N+1)}{a(N)}&=\frac{C_{N+1-200}^{485}C_N^{500}}{C_{N+1}^{500}C_{N-200}^{485}}\\&=\frac{(N+1-500)(N+1-200)}{(N+1)(N+1-200-485)}\\&=\frac{(N-499)(N-199)}{(N+1)(N-684)}\\&=\frac{N^2-698N+499\times 199}{N^2-683N-684}.\end{aligned}$$ ……9 分

由 $N^2-698N+499\times199>N^2-683N-684$ 当且仅当 $N<\dfrac{499\times199+684}{15}\approx6\,665.7$，知当 $685\leqslant N\leqslant6\,665$ 时，$a(N+1)>a(N)$；当 $N\geqslant6\,666$ 时，$a(N+1)<a(N)$，故 $N=6\,666$ 时 $a(N)$ 最大，所以 N 的估计值为 $6\,666$．　　……12 分

21．**解：**

（1）由已知得 $\dfrac{32}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1$，$2\sqrt{a^2+b^2}=10$，故 $a=4$，$b=3$．

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$．　　……4 分

（2）设 $E(4\sqrt{2},t)$，则 $|t|<3$，且 $|t|\neq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$．

直线 $DE:y=\dfrac{t}{2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2})$．

由 $\begin{cases}y=\dfrac{t}{2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2}),\\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$ 得 $(9-2t^2)x^2+8\sqrt{2}t^2x-16t^2-144=0$，所以

$x_1+x_2=\dfrac{8\sqrt{2}t^2}{2t^2-9}$，$x_1x_2=\dfrac{16t^2+144}{2t^2-9}$．　　……7 分

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{HE}-\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{DH}&=(2\sqrt{2}-x_1,-y_1)\cdot(4\sqrt{2}-x_2,t-y_2)-(4\sqrt{2}-x_1,t-y_1)\cdot(x_2-2\sqrt{2},y_2)\\&=2x_1x_2+2y_1y_2-6\sqrt{2}(x_1+x_2)-t(y_1+y_2)+32\\&=(2+\frac{t^2}{4})x_1x_2-(\frac{3\sqrt{2}}{4}t^2+6\sqrt{2})(x_1+x_2)+4t^2+32\\&=\frac{4(t^2+8)(t^2+9)}{2t^2-9}-\frac{4t^2(3t^2+24)}{2t^2-9}+4t^2+32\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{DH}$，即 $\dfrac{|GD|}{|GE|}=\dfrac{|HD|}{|HE|}$．　　……12 分

22．解：

（1）由题设可知$a \leqslant 0$，有$h'(x)=3x^2+a$，令$h'(x)=0$，解得$x_1=-\sqrt{-\frac{a}{3}}$，$x_2=\sqrt{-\frac{a}{3}}$．

当$a<0$时，$x<-\sqrt{-\frac{a}{3}}$时，$h(x)$单调递增；$-\sqrt{-\frac{a}{3}}<x<\sqrt{-\frac{a}{3}}$时，$h(x)$单调递减；$x>\sqrt{-\frac{a}{3}}$时，$h(x)$单调递增．

当$b>0$，$h(x_2)=0$，所以$h(x)$有2个零点．当$b<0$，$h(x_1)=0$，所以$h(x)$有2个零点．

当$a=0$，有$b=0$，则$h(x)$有1个零点． ……4分

（2）因为PQ为C在点P处的切线，且$Q\in C$，所以$P\oplus Q=\widetilde{P}$，$P\oplus(P\oplus Q)=P\oplus\widetilde{P}$，由题设可知$P\oplus P\oplus Q=0^*$．$P\oplus P\oplus Q\oplus\widetilde{Q}=0^*\oplus\widetilde{Q}$，所以$P\oplus(P\oplus 0^*)=\widetilde{Q}$，故$P\oplus P=\widetilde{Q}$． ……8分

（3）直线PQ的斜率$\lambda=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，设$PQ$与$C$的第三个交点为$(x_3,y_3)$，则

$y_3=\lambda(x_3-x_1)+y_1$，代入$y_3^2=x_3^3+ax_3+b$得

$\lambda^2(x_3-x_1)^2+2\lambda y_1(x_3-x_1)+y_1^2=x_3^3+ax_3+b$，代入$y_1^2=x_1^3+ax_1+b$得

$x_3^2+(x_1-\lambda^2)x_3+x_1^2+\lambda^2x_1-2\lambda y_1+a=0$，同理可得

$x_3^2+(x_2-\lambda^2)x_3+x_2^2+\lambda^2x_2-2\lambda y_2+a=0$，两式相减得$x_3=\lambda^2-x_1-x_2$，

因此$P\oplus Q$的坐标为$((\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2})^2-x_1-x_2,\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}[x_2+2x_1-(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2})^2]-y_1)$．

……12分

关于我们