

2023 届高三年级 4 月份大联考

数学试题

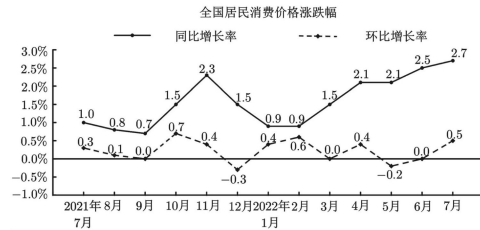
本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x > 2\}$, $B = \{x | 2 \leq 2^x \leq 8\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[1, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(2, 3]$ D. $(2, 3)$
2. “ $\ln x > \ln y$ ”是“ $x^3 > y^3$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
3. 2021 年 7 月至 2022 年 7 月,我国居民消费价格保持平稳,居民消费价格涨跌幅如图所示,则以下一定正确的序号为



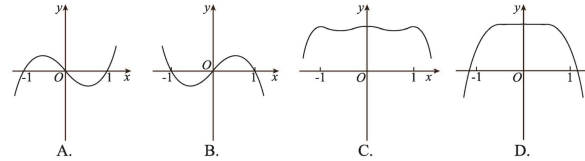
备注: 同比增长率 = $\frac{\text{当月消费价格} - \text{去年同月消费价格}}{\text{去年同月消费价格}} \times 100\%$, 环比增长率 = $\frac{\text{当月消费价格} - \text{上月消费价格}}{\text{上月消费价格}} \times 100\%$ 。

- ① 2021 年 7 月至 2022 年 7 月全国居民消费价格环比增长率的极差为 1%
 - ② 2021 年 7 月至 2022 年 7 月全国居民消费价格同比增长率的中位数与众数相同
 - ③ 从同比增长率看,2022 年 1 月与 2022 年 2 月全国居民消费价格一定相同
 - ④ 从环比增长率看,2022 年 6 月全国居民消费价格与 2022 年 5 月全国居民消费价格相同
- A. ①② B. ②③ C. ①②④ D. ①②③④

4. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T , 若 $f(T) = \frac{1}{2}$, 且 $x = \frac{7\pi}{3}$ 为函数 $f(x)$ 的极值点, 则 ω 的最小值为

- A. 3 B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{1}{7}$

5. 函数 $f(x) = \sin(x^3 - x)$ 的部分图象可以为



6. 已知正三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的底面边长为 1, 直线 A_1B 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 则正三棱柱的体积为

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{8}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{16}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{16}$

7. 若 $a = \log_5 3\ 000$, $b = \log_4 2\ 023$, $c = \frac{11 \times 1.001^{0.01}}{2}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

8. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x$ 在点 P (位于第四象限) 处的切线 l 与 x 轴正半轴、 y 轴负半轴分别交于 B 、 C 点, 当直线 l 、曲线 $f(x)$ 、 x 轴及 y 轴所围成图形的面积取最小值时, $\frac{CP}{PB} =$

- A. 3 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1

二、多选题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知 $z \in \mathbb{C}$, \bar{z} 是 z 的共轭复数, 则

- A. 若 $z = \frac{1+3i}{1-3i}$, 则 $\bar{z} = \frac{-4-3i}{5}$
- B. 若 z 为纯虚数, 则 $z^2 < 0$
- C. 若 $z - (2+i) > 0$, 则 $z > 2+i$
- D. 若 $M = \{z | |z+3i| \leq 3\}$, 则集合 M 所构成区域的面积为 6π

10. 已知过抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点, 且满足 $|AF| > |BF|$. 若 $|AB| = 3$, 则

- A. l 的斜率的绝对值为 $2\sqrt{2}$ B. $|AF| - |BF| = \sqrt{3}$
- C. $|AF| \cdot |BF| = \frac{3}{2}$ D. $\frac{|AF|}{|BF|} = 2 + \sqrt{3}$

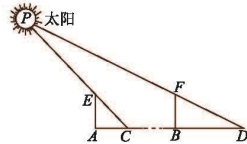
11. 在边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 中, P 为边 AF 上的动点, Q 为边 BC 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 的值可以为

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 2

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的半焦距为 c , 右焦点为 F , 短轴的上端点为 B , 离心率为 e , O 为坐标原点, 则
- A. 若 $2b > a + c$, 则 $b^2 > ac$ B. 若 $b^2 > ac$, 则 $2b > a + c$
- C. 若 $\tan \angle BFO > 1$, 则 $0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 若 $\tan \angle BFO > 1$, 则 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 若 $P(X \leq 0) = P(X \geq 2)$, 则 $\mu =$ _____.
14. 直线 $l: kx - y + 2 = 0$, 圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$, 设直线 l 与圆 C 相交于 Q, R 两点, 则 $\triangle QRC$ 面积的最大值为 _____.
15. “寸影千里”法是《周髀算经》中记载的一种远距离测量的估算方法. 其具体方法是在同一天(如夏至)的正午, 于两地分别竖起同高的标杆, 然后测量标杆的影长, 并根据“日影差一寸, 实地相距千里”的原则推算两地距离. 如图, 某人在夏至的正午分别在同一水平面上的 A, B 两地竖起高度均为 a 寸的标杆 AE 与 BF , AC 与 BD 分别为标杆 AE 与 BF 在地面的影长, 再按影长 AC 与 BD 的差结合“寸影千里”来推算 A, B 两地的距离. 记 $\angle CEA = \alpha$, $\angle BFD = \beta (\alpha < \beta)$, 若 $\sin(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则按照“寸影千里”的原则 A, B 两地的距离(里)大约为 _____.



16. 已知三棱锥 $V-ABC$ 的体积为 4, D, E, F 分别为棱 VC, VA, VB 的中点, 设平面 ABD 、平面 BCE 、平面 ACF 相交于 O 点, 三棱锥 $O-ABC$ 的三个侧面与三棱锥 $V-ABC$ 的三个侧面围成的几何体的体积为 M , 则 M 的值为 _____.

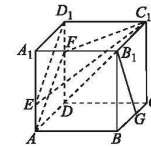
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)
已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $8S_n = (a_n + 2)^2 (n \in \mathbb{N}^+)$.
(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;
(2) 已知 $a_n = \log_{\sqrt{3}} b_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
18. (本小题满分 12 分)
某景区为了进一步优化旅游服务环境, 强化服务意识, 全面提升景区服务质量, 准备从 6 个跟团游团队和 3 个私家游团队中随机抽取一些团队展开满意度调查, 并将这些团队依次编号.
(1) 若一次抽取两个号码, 求这两个号码全是私家游团队的概率;
(2) 假设有放回地一次性抽取 1 个号码, 连续抽取 4 次, 设 4 次抽到私家游团队的个数为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F, G 分别在棱 AA_1, DD_1, BC 上, $AE = D_1F = 1, BG = 2$.

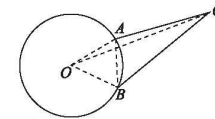
- (1) 求证: $B_1G \perp$ 平面 C_1D_1E ;
(2) 求平面 C_1D_1E 与平面 AC_1F 所成的锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

如图, 均匀的圆面绕圆心 O 作逆时针方向的匀速旋转, 圆面上初始位置为 A 点, t 秒后转到点 B , 旋转的角速度为 $\omega = \frac{\pi}{30}$ (rad/s), 在旋转圆面的右侧有一固定相机 CC, O 两点分别在 AB 的异侧, 且 $OA = 5$ m, $AC = 7$ m.

- (1) 旋转角为 θ , 若 $\theta \in ((2n+1)\pi, 2(n+1)\pi) (n \in \mathbb{N})$, 求 t 的取值范围及弦 AB 的长度;
(2) 在(1)的条件下, 若 $t = 110$ s, $BC = 8$ m, 求 OC 的长.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \cos x - \frac{1}{e^x}$.

- (1) 判断: 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 内零点的个数;
(2) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上存在两个不同的单调递增区间, 一个单调递减区间.

$$\left[\text{附: } 7 < e^3 < 8, e^3 > 16, e^{-\frac{\pi}{4}} < \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

22. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{5}{3}$, 点 $A(a, 0)$ 到渐近线的距离为 $\frac{12}{5}$.

- (1) 求双曲线的方程;
(2) 若直线 l 与双曲线 C 交于 M, N 两点, 且 $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = 0$, 试探究直线 l 是否过定点? 若过定点, 求出该定点坐标; 若不过定点, 说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



 微信搜一搜

 自主选拔在线