高二期末考试数学试题参考答案

1. D【解析】$A=\{x\,|\,x\le\log_3 10\}$，$\therefore A\cap N=\{0,1,2\}$.

2. B【解析】$\dfrac{1+2i}{1+2i^3}=\dfrac{1+2i}{1-2i}=\dfrac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$，$\therefore\dfrac{1+2i}{1+2i^3}$在复平面上对应的点的坐标为$(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$，位于第二象限.

3. A【解析】因为$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-7,m),\vec{a}+\vec{b}=(-6,2+m)$，由$\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，得$-6+2\times(m+2)=0$，所以$m=1$.

4. C【解析】$f(x)=log_2(x^2-4x+3)$的单调递增区间需要满足$\begin{cases}x^2-4x+3>0\\x>2\end{cases}$，解得$x>3$.

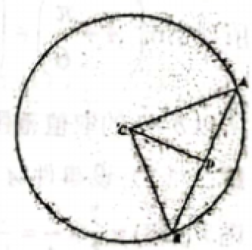
5. C【解析】联立$\begin{cases}y=x\\\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{8}=1\end{cases}$，得$(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{8})x^2=1$，由韦达定理得$x_1x_2=\dfrac{-1}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{8}}=-8$，解得$a^2=4$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$.

6. A【解析】由$S_4+S_6-2S_5=S_6-S_5-(S_5-S_4)=a_6-a_5=d$，所以$S_4+S_6>2S_5\Leftrightarrow d>0$，所以“$d>1$”是“$S_4+S_6>2S_5$”的充分不必要条件.

7. D【解析】因为$\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{6})=\sin[2(\alpha+\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{\pi}{2}]=-\cos 2(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=-\left[1-2\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=-\dfrac{1}{3}$.

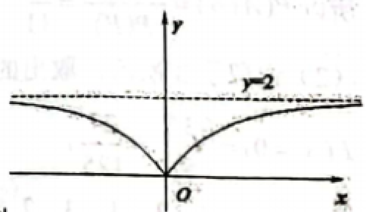
所以$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因为$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})>0$，所以$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

8. B【解析】直线l恒过定点$D(3,1)$，D点在圆C内部，当AB垂直于CD时，AB最短，此时$\angle ACB$最大．$\cos\angle ACD=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin\angle ACD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则$\sin\angle ACB=2\sin\angle ACD\cos\angle ACD=\dfrac{4}{5}$.



9. ACD【解析】一定不变的只有中位数，故选ACD.

10. AD【解析】$\because f(x)$过原点，$\therefore f(0)=0$，$\therefore a+b=0$①，又$\because x\to\infty$时，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{|x|}\to 0$，$\therefore x\to\infty$时，$f(x)=a\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\infty}+b\to b$，由题，图象无限接近直线$y=2$，则$b=2$②，由①②知$a=-2$，$b=2$，故$A$正确；所以$f(x)=-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{|x|}+2$，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{|x|}\in(0,1]$，$-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{|x|}+2\in[0,2)$，所以$B$错误；由图知，$f(x)$在$x\in(-\infty,0]$上单调递减，因为$x<y<0$，则$f(x)>f(y)$，故$C$错误；$\because f(x)$为偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$，又$\because f(y)=f(x)$，$\therefore f(y)=f(-x)$，$\therefore -x=y$，$\therefore x+y=0$，故$D$正确.



11. BD【解析】对A，由$f(x)+g(x)=2$，令$x=0$可得$f(0)+g(0)=2$，又$g(x)$为奇函数，故

$\therefore k_{CD}=k_{AB}$，∴化为 $x_1+x_2=2$.①

由正方形 $ABCD$ 可得 $|BC|=|CD|$，

$$\therefore \frac{|2x_1-x_1^2-17|}{\sqrt{5}}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1^2-x_2^2)^2}, ②$$

①②联立解得 $x_1=3$ 或 9 或-1 或-7.

取 3 或-1 时，$|BC|=4\sqrt{5}$，∴正方形 $ABCD$ 的面积 S 取得最小值 80.

17. 解：(1)由 $a_{n+1}=2S_n+1$，可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geq2)$，

两式相减，得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，$a_{n+1}=3a_n(n\geq2)$. ……………2 分

又因为 $a_2=2S_1+1=3$，所以 $a_2=3a_1$……3 分

故 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，所以 $a_n=3^{n-1}$……………4 分

(2)设 $\{b_n\}$ 的公差为 d，由 $T_3=15$，得 $b_1+b_2+b_3=15$，可得 $b_2=5$，……………5 分

故可设 $b_1=5-d$，$b_3=5+d$.

又 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=9$，

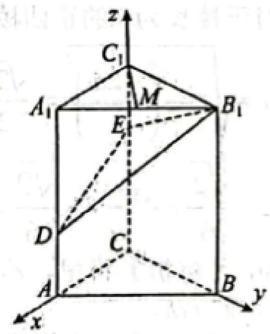
由题意可得 $(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$……………7 分

解得 $d_1=2$，$d_2=-10$……8 分

因为等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正数，所以 $d>0$，所以 $d=2$.

$T_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+2n$……………10 分

18. 解：（1）证明：根据题意，以 C 为原点，分别以 CA,CB,CC_1 所在直线为 x,y,z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，……………1 分



则 $C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,0,3)$，

$A_1(2,0,3)$，$B_1(0,2,3)$，$D(2,0,1)$，$E(0,0,2)$，$M(1,1,3)$，

$\overrightarrow{C_1M}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{B_1D}=(2,-2,-2)$，……………2 分

则 $\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{B_1D}=1\times2+1\times(-2)+0\times(-2)=0$，……………4 分

所以 $\overrightarrow{C_1M}\perp\overrightarrow{B_1D}$，即 $C_1M\perp B_1D$；……………5 分

（2）由（1）可得，$\overrightarrow{ED}=(2,0,-1)$，设平面 DB_1E 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{B_1D}\cdot\vec{n}=2x-2y-2z=0\\ \overrightarrow{ED}\cdot\vec{n}=2x-z=0\end{cases}$，……………7 分

解得 $\begin{cases}z=2x\\ y=-x\end{cases}$，取 $x=1$，则 $y=-1,z=2$

所以平面 DB_1E 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,2)$，……………8 分

又因为 $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，……………9 分

设 AB 与平面 DB_1E 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AB},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，……………11 分

所以直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$……………12 分

19. 解：（1）由 $\frac{2a-c}{\cos(A+B)}=\frac{b}{\cos(A+C)}$，即 $\frac{2a-c}{\cos(\pi-C)}=\frac{b}{\cos(\pi-A)}$，

得 $\dfrac{2a-c}{\cos C}=\dfrac{b}{\cos A}$，……………………………………………………2 分

由正弦定理可得 $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，

所以 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)$，……………………………3 分

所以 $2\sin A\cos B=\sin A$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A>0$，

所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………,……………5 分

（2）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以 $a+c=\dfrac{b}{\sin B}(\sin A+\sin C)=2\sqrt{3}\left[\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)\right]$

$=2\sqrt{3}\left(\sin A+\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos A-\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin A\right)$

$=2\sqrt{3}\left(\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A\right)=6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A\right)=6\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ……….7 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，………8 分

所以 $A\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

所以 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，$6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(3\sqrt{3},6\right]$，……………………………9 分

所以 $b+c$ 的取值范围为 $\left(3\sqrt{3},6\right]$ ……………………………………………10 分

20. 解：（1）设事件 A 为第 1 次取出的是红球，事件 B 为第 2 次取出的是白球，……………1 分

则 $P(AB)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{10}$，……………2 分

$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{33}{50}$，……………4 分

所以 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{5}{11}$． ……………5 分

（2）记取了 3 次后，取出的红球的个数为 X，则 $X=0,1,2$，……………6 分

$P(X=0)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$，

$P(X=1)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{549}{1000}$，

$P(X=2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{47}{200}$，…………9 分

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{549}{1000}$	$\frac{47}{200}$

……………10 分

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{549}{1000}+2\times\frac{47}{200}=\frac{1019}{1000}$. ……………12 分

21．解：（1） 因为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $B(0,-1)$，

所以 $b^2=1$，……………1 分

又椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，……………2 分

所以 $a=2$，……………3 分

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………4 分

（2）设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，$N(0,2k)$，

所以 $|AN|=\sqrt{4+4k^2}=2\sqrt{1+k^2}$，……………5 分

设 $M(x_1,y_1)$，由 $\begin{cases} y=k(x+2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$，

则 $-2+x_1=\frac{-16k^2}{1+4k^2},-2x_1=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$ ………6 分

所以 $|AM|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(-2+x_1)^2-4(-2)x_1}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\frac{-16k^2}{1+4k^2})^2-\frac{64k^2-16}{1+4k^2}}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$，………7 分

设直线 OP 的方程为 $y=kx$，

由 $\begin{cases} y=kx \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2-4=0$，

设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2=\frac{4}{1+4k^2}$，则 $y_0^2=\frac{4k^2}{1+4k^2}$，……………8 分

所以 $|OP|^2=x_0^2+y_0^2=\frac{4+4k^2}{1+4k^2}$，……………9 分

故 $\frac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|\cdot|OQ|}=\frac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|^2}=\frac{\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\times2\sqrt{1+k^2}}{\frac{4+4k^2}{1+4k^2}}=2$，……………11 分

因此 $\frac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|\cdot|OQ|}$ 为定值. ……………12 分

22．解：（1）$x>0$，$f'(x)=2m-\frac{1}{x}$，

1° 若 $m\le 0$，则 $f'(x)<0$，此时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；…………2 分

2° 若 $m>0$，则 $f'(x)=2m-\frac{1}{x}=0$，得 $x=\frac{1}{2m}$

当 $0<x<\frac{1}{2m}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2m})$ 上单减，

当 $x>\frac{1}{2m}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2m},+\infty)$ 上单增…………4 分

综上，当 $m\le 0$，$f(x)$ 的单减区间为 $(0,+\infty)$，无单增区间；

当 $m>0$，$f(x)$ 的单减区间为 $(0,\frac{1}{2m})$，单增区间为 $(\frac{1}{2m},+\infty)$ …………5 分

（2）由题知 $2mx_1-\ln x_1+2mx_2-\ln x_2\le 2(x_1{}^2+x_2{}^2)+3x_1x_2$，

即 $2m(x_1+x_2)-\ln(x_1x_2)\le 2(x_1+x_2)^2-x_1x_2$

即 $x_1x_2-\ln(x_1x_2)\le 2(x_1+x_2)^2-2m(x_1+x_2)$ …………7 分

因为上式对 $m\geqslant -1$ 恒成立,所以 $x_1x_2-\ln(x_1x_2)\le 2(x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2)$ 成立，…………9 分

考虑函数 $g(x)=x-\ln x$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，此时 $g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，此时 $g(x)$ 单调递增.

因此 $g(x)\ge g(1)=1$，所以 $x_1x_2-\ln(x_1x_2)\ge 1$，…………10 分

所以 $2(x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2)\ge 1$，

解得 $x_1+x_2\ge\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，得证…………12 分