2023 届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（三）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	A	A	C	C	D	B	B	C	A

【解析】

1．$z=1+2\mathrm{i}$，故$z\,\mathrm{i}=\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2=-2+\mathrm{i}$，故选 B．

2．$B=\{0,1,2,3,4\}$，故$A\cap B=\{0,1,2\}$，故选 D．

3．对于 A：由题图知，2023 年 4 月 19 日至 4 月 25 日的高速公路车流量的极差为$25-2=23$，故 A 正确；对于 B：易知 2023 年 4 月 19 日至 4 月 25 日的高速公路车流量的中位数为 17，故 B 正确；对于 C：2023 年 4 月 19 日至 4 月 21 日的高速公路车流量波动更大，故 C 错误；对于 D：2023 年 4 月 23 日的高速公路车流量为 22 万车次，同比增长率为 10%，设 2022 年 4 月 23 日的高速公路车流量为 x 万车次，则$\dfrac{22-x}{x}\times 100\%=10\%$，解得$x=20$，故 D 正确，故选 C．

4．观察主视图中的木条位置和木条的层次位置，分析可知侧视图是 A，故选 A．

5．因为$f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x^2+2}$，所以$f(-x)=f(x)$，即函数为偶函数，排除 C，D；因为$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>0$，所以排除 B，故选 A．

6．$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$，由已知得$\begin{cases}a+2b+1=0,\\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3},\\ b=-\dfrac{1}{6},\end{cases}$ $f(x)=-\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{1}{6}x^2+x$，

$f'(x)=-\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{3}x+1=-\dfrac{(x-2)(x-1)}{3x}$，由$f'(x)>0$，得$1<x<2$，故选 C．

7．如图 1，取A_1C_1的中点D，连接B_1D，AD，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面$A_1B_1C_1$是正三角形，∴$B_1D\perp A_1C_1$．又∵$CC_1\perp$底面$A_1B_1C_1$，∴$CC_1\perp B_1D$．又$CC_1\cap A_1C_1=C_1$，∴$B_1D\perp$平面AA_1C_1C，∴$\angle B_1AD$为AB_1与平面AA_1C_1C所成角．由题意，设$AB=AC=AA_1=2a$，$B_1D=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$，$AB_1=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$，在 Rt△$B_1AD$ 中，$\sin\angle B_1AD=\dfrac{B_1D}{AB_1}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，故选 C．

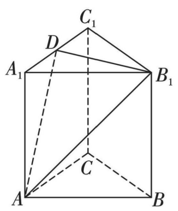

图 1

8．如图 2，由题意可得$AB=2\sqrt{3}CD$，弧田面积$=\dfrac{1}{2}$(弦×矢＋矢²)$=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3}CD\times CD+CD^2)=4\sqrt{3}+2$，所以$CD=2$．设圆半径为 r，则有$AO^2=AD^2+OD^2$，即$r^2=(2\sqrt{3})^2+(r-2)^2$，解得$r=4$，故$OD=2$，在 Rt△$AOD$ 中，$\angle AOD=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，所求弧长为$4\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{8\pi}{3}$，故选 D．

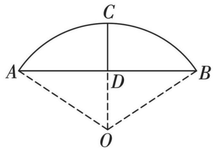

图 2

9．椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，∵直线 $y=\sqrt{3}kx(k\neq 0)$ 过原点，设 $A(x_1,\ y_1),\ B(-x_1,\ -y_1)$，$D(x_2,\ y_2)$，

$\therefore k_{AD}\bullet k_{BD}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\bullet\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$. 又∵ $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{5}=1$①，$\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{5}=1$②，

①−②得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{9}+\frac{y_1^2-y_2^2}{5}=0$，$\therefore\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=-\frac{5}{9}$，$\therefore k_{AD}\bullet k_{BD}=-\frac{5}{9}$，故选 B.

10．如图 3 所示，设圆锥的底面圆圆心为点 D，延长 AD 与球面交于 B．设圆锥底面半径为 r，母线为 l，则 $\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2$，得 $l=2r$，∴圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}r$，设球半径为$R$，则$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$CD\perp AB$，

有$CD^2=AD\bullet BD$，即$r^2=h\bullet(2R-h)$，即$r^2=\sqrt{3}r\bullet(2R-\sqrt{3}r)$，

$\therefore R=\frac{2r}{\sqrt{3}}$，故$\frac{V_{锥}}{V_{球}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2\bullet\sqrt{3}r}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3}=\frac{9}{32}$，故选 B.

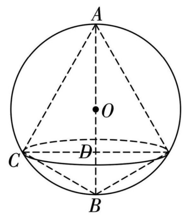
图 3

11．当$a\leqslant 0$时，对任意$x>0$，$f(x)=(x-a)^2-4$在$(0,+\infty)$内最多有 1 个零点，不符题意；所以$a>0$，当$x\geqslant a$时，$f(x)=(x-a)^2-4$，由$(x-a)^2-4=0$，可得$x=a+2$或$x=a-2$，则在$x\geqslant a$上，$f(x)=(x-a)^2-4$有一个零点，所以$f(x)=\cos(\pi x-\pi a)$在$(0,\ a)$内有 3 个零点，即$\cos[\pi(x-a)]=0$在$(0,\ a)$内有 3 个零点，因为$0<x<a$，所以$-a<x-a<0$，$-\pi a<\pi(x-a)<0$，所以$-\frac{7\pi}{2}\leqslant-\pi a<-\frac{5\pi}{2}$，解得$\frac{5}{2}<a\leqslant\frac{7}{2}$，综上所述，$a$的取值范围为$\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right]$，故选 C.

12．由题意得 $a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$，$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\bullet\frac{3e}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{e}}{4}$，而 $e>\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$，$\therefore\sqrt{e}>\frac{4}{3}$，$\therefore\frac{3}{4}\sqrt{e}>1$，则 $\frac{a}{c}>1$，即$a>c$，$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}>\ln 2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}>\frac{\ln 2}{\ln e}\Leftrightarrow\frac{\ln e}{\sqrt{e}}>\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$，构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$，$f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$，可知当 $0<x<e^2$时，$f(x)$ 单调递增；当 $x>e^2$时，$f(x)$ 单调递减，故 $f(e)>f(2)\Rightarrow a>b$，$\frac{4\sqrt{2}}{3e}>\frac{\ln 2}{\ln e}\Leftrightarrow\frac{2\ln e}{e}>\frac{3\ln 2}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}>\frac{\ln 8}{\sqrt{8}}$，由于 $f(x)$ 在 e^2 处取得最大值，故不等关系显然成立，故选 A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$-\frac{12}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\left(-1,\ \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$

【解析】

13．由题意，向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则$\vec{a}\bullet\vec{b}=-m-4m-12=0$，解得$m=-\frac{12}{5}$.

14．设Ω为“$k,\ b$的所有组合”，则$n(\Omega)=4\times 3=12$，设事件A为“直线$y=kx+b$不经过第二象限”，则要求

$k>0$，$b<0$，所以$n(A)=2\times 2=4$，从而$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$．

15．依题意可设圆 C：$(x-c)^2+y^2=a^2$ 与双曲线 T：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线交于点 M，N，由 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$，可知$\triangle MNF$为直角三角形，所以圆 C 与渐近线相交所得弦长$|MN|=\sqrt{2}a$，由题可得双曲线 T：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线为$bx-ay=0$，所以焦点F到渐近线l的距离为$d=\dfrac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$，所以$a^2=b^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$，得$a^2=2b^2$，所以双曲线$C$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

16．依正弦定理$\dfrac{b(\sin C-\sin B)}{a\sin A}=\dfrac{b(c-b)}{a^2}$，由$\tan A<0$，知角$A$是钝角，则$a^2>b^2+c^2$，当$c>b$时，令$\dfrac{c}{b}=t>1$，

$$\frac{b(c-b)}{a^2}<\frac{bc-b^2}{b^2+c^2}=\frac{\frac{c}{b}-1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2+1}=\frac{t-1}{t^2+1}=\frac{t-1}{(t-1)^2+2(t-1)+2}$$

$$=\frac{1}{(t-1)+\frac{2}{t-1}+2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$，当且仅当$t=\sqrt{2}+1$时，取“=”，

即$0<\dfrac{b(c-b)}{a^2}<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，当$c=b$时，$\dfrac{b(c-b)}{a^2}=0$；当$c<b$时，令$\dfrac{c}{b}=t\in(0,\ 1)$，$\dfrac{b(c-b)}{a^2}>\dfrac{bc-b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{\frac{c}{b}-1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2+1}=\dfrac{t-1}{t^2+1}$，

令$f(t)=\dfrac{t-1}{t^2+1}$，$t\in(0,\ 1)$，$f'(t)=\dfrac{1\cdot(t^2+1)-2t\cdot(t-1)}{(t^2+1)^2}=\dfrac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}>0$，所以$f(t)$在$(0,\ 1)$上单调递增，所以$f(0)<f(t)<f(1)$，即$-1<\dfrac{b(c-b)}{a^2}<0$，综上得$-1<\dfrac{b(c-b)}{a^2}<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，所以$\dfrac{b(\sin C-\sin B)}{a\sin A}$的取值范围是$\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为当$n\geqslant 2$时，有$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+a_1=0$ ①，

所以当$n\geqslant 3$时，$(n-3)a_{n-1}-(n-2)a_{n-2}+a_1=0$ ②，……………………………………（2 分）

由①−②，整理可得$a_n+a_{n-2}=2a_{n-1}$，…………………………………………………（3 分）

所以数列$\{a_n\}$是等差数列．………………………………………………………………（4 分）

（2）解：由（1）可知$\{a_n\}$是等差数列，所以$\begin{cases}S_4=\dfrac{4(a_1+a_4)}{2}=56,\\ a_1=20,\end{cases}$ ……………………（5 分）

可得$\begin{cases}a_4=8,\\ a_1=20,\end{cases}$ ………………………………………………………………………………（7 分）

所以数列$\{a_n\}$的公差$d=\dfrac{8-20}{4-1}=-4$，…………（8 分）

所以$a_n=20-4(n-1)=-4n+24$，…………（9 分）

所以$S_n=\dfrac{n(20-4n+24)}{2}=-2n^2+22n=-2\left(n-\dfrac{11}{2}\right)^2+\dfrac{121}{2}$．…………（10 分）

又$n\in\mathbf{N}^*$，所以当$n=5$或$n=6$时，S_n取到最大值为 60．…………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

（1）证明：∵$ABCD$为直角梯形，$AB/\!/CD$，∴$CD\perp BC$．

又∵$CD\perp CE$，$BC\cap CE=C$，…………（1 分）

$CD\perp$平面BCE.　…………（2 分）

又∵$BE\subset$平面BCE，∴$CD\perp BE$．…………（3 分）

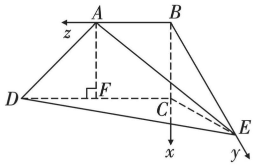

图 4

又∵$\angle ADC=45°$，$AD=\sqrt{2}$，

如图 4，作$AF\perp CD$，∴$AF=1$，∴$BC=1$．

又∵$\angle EDC=45°$，∴$CD=CE=2$．

又∵$BE=\sqrt{3}$，由勾股定理可知$BE\perp BC$．…………（4 分）

∵$BC\cap CD=C$，∴$BE\perp$平面$ABCD$．…………（5 分）

∵$BE\subset$平面ABE，∴平面$ABE\perp$平面$ABCD$．…………（6 分）

（2）解：由（1）知$CD\perp$平面BCE，$AB/\!/CD$，

∴$AB\perp$平面BCE．

又∵$BC\perp BE$，∴以B为原点建立空间直角坐标系，…………（7 分）

$A(0,0,1)$，$D(1,0,2)$，$E(0,\sqrt{3},0)$，$C(1,0,0)$.

∵$CD\perp$平面BCE，$\overrightarrow{CD}=(0,0,2)$是平面$BCE$的一个法向量．

…………（8 分）

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面ADE的法向量，$\overrightarrow{AD}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=(0,\sqrt{3},-1)$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x+z=0,\\ \sqrt{3}y-z=0,\end{cases}$ …………（9 分）

令$z=\sqrt{3}$，∴$\vec{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$．…………（10 分）

设平面ADE与平面BCE所成的二面角为θ，且θ为锐角，

所以$\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．…………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

解：（1）记事件$A_i(i=1,2,3)$表示第一局获得i分，事件$B_i(i=1,2)$表示第二局获得i分，

这些事件相互独立，由条件知X的可能值为 5，4，3，2．

…………（1 分）

$P(X=5)=P(A_3B_2)=P(A_3)P(B_2)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$；

$P(X=4)=P(A_3B_1)+P(A_2B_2)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$；

$P(X=3)=P(A_2B_1)+P(A_1B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$；

$P(X=2)=P(A_1B_1)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$. ……………………………………………………（3 分）

其分布列为

X	5	4	3	2
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{16}$

……………………………………………………………………………（4 分）

$E(X)=5\times\frac{1}{16}+4\times\frac{5}{16}+3\times\frac{7}{16}+2\times\frac{3}{16}=\frac{52}{16}=\frac{13}{4}$. ………………………………（6 分）

（2）设小明每天赢得的局数为Y，则$Y\sim B\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$，

于是$P(Y=k)=C_{20}^{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}$. ……………………………………………………（7 分）

根据条件得$\begin{cases}C_{20}^{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{21-k} & ①,\\ C_{20}^{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{19-k} & ②,\end{cases}$

……………………………………………………………………………（9 分）

由①得$\frac{20!}{k!\cdot(20-k)!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}\geqslant\frac{20!}{(k-1)!\cdot(21-k)!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{21-k}$，得$k\leqslant\frac{21}{4}$，

同理由②得$\frac{17}{4}\leqslant k$，所以$\frac{17}{4}\leqslant k\leqslant\frac{21}{4}$，……………………………………………（11 分）

又因为$k\in\mathbf{Z}$，所以$k=5$，

因此在每天的 20 局四人赛中，小明赢得 5 局的比赛概率最大. ……………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）解：令$h(x)=\ln(x+1)-\frac{kx}{x+k}$，$h(x)$的定义域为$(-1,\ +\infty)$.

$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{k^2}{(x+k)^2}=\frac{x[x-(k^2-2k)]}{(x+1)(x+k)^2}$. ……………………………………………（1 分）

①当$k\in(0,\ 1)\cup(1,\ 2)$时，$x\in(-1,\ k^2-2k)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(-1,\ k^2-2k)$上是增函数；

$x\in(k^2-2k,\ 0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(k^2-2k,\ 0)$上是减函数；

$x\in(0,\ +\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,\ +\infty)$上是增函数；

……………………………………………………………………………（3 分）

②当$k=1$时，$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$，

$x\in(-1,0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(-1,0)$上是减函数；

$x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数；……………………………（4分）

③当$k=2$时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$单调递增；

④当$k>2$时，$x\in(-1,0)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(-1,0)$上是增函数，

$x\in(0,k^2-2k)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,k^2-2k)$上是减函数，

$x\in(k^2-2k,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$是增函数．………………………………………（6分）

（2）证明：由（1）得$k=3$时，$h(x)=\ln(x+1)-\frac{3x}{x+3}$，$h(x)$在$(0,3)$上是减函数，

即当$x\in(0,3)$时，$h(x)<h(0)=0$，即$\ln(x+1)<\frac{3x}{x+3}(0<x<3)$，

即$x+1<e^{\frac{3x}{x+3}}$．……………………………………………………………………（8分）

令$x=\frac{1}{k^2}$，$e^{\frac{3}{1+3k^2}}>\frac{1}{k^2}+1>\frac{1}{k(k+1)}+1=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+1$，……………………………（10分）

求和即得$\sum\limits_{k=1}^{n}e^{\frac{3}{1+3k^2}}>1-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+1=n+1-\frac{1}{n+1}$．

………………………………………………………………………………………（12分）

21．（本小题满分12分）

（1）解：$L_1=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c$，

$L_2=|PF_1|+|PF_2|+|BF_1|+|BF_2|=2a+2a=4a$，

………………………………………………………………………………………（2分）

则$\frac{L_1}{L_2}=\frac{2a+2c}{4a}=\frac{3}{4}$，得$a=2c$，与$b=\sqrt{3}$联立解得$a^2=4$，$b^2=3$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．…………………………………………………（4分）

（2）证明：设$P(x_0,\ y_0)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

可设直线PA的方程为$x=my-1$，其中$m=\frac{x_0+1}{y_0}$，

联立$\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

则$y_0y_1=\frac{-9}{3m^2+4}=\frac{-9}{3\left(\frac{x_0+1}{y_0}\right)^2+4}$，…………………………………………………（6分）

同理可得，$y_0y_2=\dfrac{-9}{3\left(\dfrac{x_0-1}{y_0}\right)^2+4}$．…………………………………………………（7 分）

因为 $\dfrac{S_2}{S_3-S_2}+\dfrac{S_1}{S_2-S_1}=\dfrac{S_{\triangle PF_1B}}{S_{\triangle AF_1B}}+\dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle BF_1F_2}}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}PF_1\cdot F_1B\sin\angle PF_1B}{\frac{1}{2}AF_1\cdot F_1B\sin\angle AF_1B}+\dfrac{\frac{1}{2}PF_2\cdot F_1F_2\sin\angle PF_2F_1}{\frac{1}{2}BF_2\cdot F_1F_2\sin\angle BF_2F_1}$

$=\dfrac{PF_1}{AF_1}+\dfrac{PF_2}{BF_2}$，…………………………………………………………………………（9 分）

所以 $\dfrac{S_2}{S_3-S_2}+\dfrac{S_1}{S_2-S_1}=\dfrac{PF_1}{AF_1}+\dfrac{PF_2}{BF_2}=\dfrac{y_0}{-y_1}+\dfrac{y_0}{-y_2}=-y_0\left(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}\right)$……………………（10 分）

$=\dfrac{y_0^2\left[3\left(\dfrac{x_0+1}{y_0}\right)^2+4+3\left(\dfrac{x_0-1}{y_0}\right)^2+4\right]}{9}$

$=\dfrac{3(x_0+1)^2+3(x_0-1)^2+8y_0^2}{9}$

$=\dfrac{6x_0^2+8y_0^2+6}{9}=\dfrac{24+6}{9}=\dfrac{10}{3}$,

所以 $\dfrac{S_2}{S_3-S_2}+\dfrac{S_1}{S_2-S_1}$ 是定值．…………………………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\varphi,\\ y=1+\sin\varphi,\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），消去 φ 可得，

$x^2+(y-1)^2=1$，所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$．

……………………………………………………………………………………（1 分）

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入得，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$，……………（2 分）

C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$，联立可得 $\tan\theta=\sqrt{3}$，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，……………（3 分）

所以曲线 C_1 和曲线 C_2 的交点极坐标为 $(0,0)$ 和 $\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$．…………………………（5 分）

（2）当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\rho_M=2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，$\rho_N=2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=3$，$|MN|=|\rho_M-\rho_N|=2$．

……………………………………………………………………………………（6 分）

显然当点 P 到直线 MN 的距离最大时，$\triangle PMN$ 的面积最大，

……………………………………………………………………………………（7 分）

直线 MN 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，圆心 C_2 到直线 MN 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，

……………………………………………………………………（8 分）

所以点 P 到直线 MN 的最大距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，……………………………（9 分）

所以 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．……………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）解：原不等式等价于 $|x+3|+|x-1|\geqslant m^2-3m$，$x\in\mathbf{R}$，……………………………（1 分）

$\because |x+3|+|x-1|\geqslant|x+3-x+1|=4$，………………………………………………（3 分）

$\therefore 4\geqslant m^2-3m$，解得 $-1\leqslant m\leqslant 4$．…………………………………………………（5 分）

（2）证明：由（1）知 $M=-1$，

$\therefore a+b=2$，$\therefore (a+1)+(b+1)=4$．…………………………………………………（6 分）

$\because \frac{1}{a+1}+\frac{4}{b+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{4}{b+1}\right)[(a+1)+(b+1)]=\frac{1}{4}\left[5+\frac{b+1}{a+1}+\frac{4(a+1)}{b+1}\right]\geqslant\frac{1}{4}\times(5+4)=\frac{9}{4}$，

……………………………………………………………………（9 分）

当且仅当 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{5}{3}$ 时等号成立．…………………………………………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。