# 江西　　2023－2024学年高三第一次联考

## 数　学

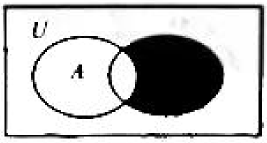
（考试时间：120分钟　　满分：150分）

**注意事项：**

1. 答题前，考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。并请认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号，在规定的位置贴好条形码。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 已知全集 $U=R$，集合 $A=\{1,2,3\}$，集合 $B=\{0,2,3,4\}$，则图中的阴影部分表示的集合为　（　　）




A. $\{2,3\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{4\}$　　D. $\{0,4\}$

2. 在复平面内，若复数 $z$ 满足 $z-\bar{z}=4i$，$|z|=3$ 复数 $z$ 所对应的点位于第一象限，则 $z=$　（　　）

A. $2\sqrt{2}+i$　　B. $2\sqrt{2}-i$　　C. $\sqrt{5}+2i$　　D. $\sqrt{5}-2i$

3. 已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 互为相反向量，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=1$，则 $|\vec{b}|=$　（　　）

A. 2　　B. 7　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{7}$

4. 某校对学生记忆力 $x$ 和判断力 $y$ 进行统计分析，所得数据如表：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 记忆力 $x$ | 2 | 5 | 6 | 8 | 9 |
| 判断力 $y$ | 7 | 8 | 10 | 12 | 18 |

则 $y$ 关于 $x$ 的经验回归方程为（　　）（附：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$）

A. $\hat{y}=-1.4x+19.4$　　B. $\hat{y}=1.4x+2.6$

C. $\hat{y}=1.4x-2.6$　　D. $\hat{y}=-1.4x-19.4$

5. 已知直线 $a,b,c$ 的斜率分别为 $e^{\pi},\pi^{e},-1$ 倾斜角分别为 $\alpha,\beta,\gamma$，则　（　　）

A. $\alpha>\beta>\gamma$　　B. $\gamma>\alpha>\beta$　　C. $\gamma>\beta>\alpha$　　D. $\beta>\alpha>\gamma$

6. 已知函数 $f(x)=\sin\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\cos^2\frac{\omega x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(\omega>0)$，在 $[0,\pi]$ 上有且仅有2个极小值点，则实

数 $\omega$ 的取值范围 ( )

A. $\left[\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{19}{6},\frac{31}{6}\right)$　　D. $\left(\frac{19}{6},\frac{31}{6}\right]$

7. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为3，$M,N$ 分别为棱 $AA_1,CC_1$ 的中点，点 $Q$ 是棱 $A_1D_1$ 上靠近点 $A_1$ 的三等分点，则平面 $MNQ$ 截该正方体所得截面的面积为 ( )

A. $5\sqrt{22}$　　B. $\frac{5\sqrt{22}}{2}$　　C. $4\sqrt{22}$　　D. $2\sqrt{22}$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_na_{n+1}=\frac{n+2}{n}, b_n=a_n^2$，则以下说法不正确的是 ( )

A. $\forall n\in N^*, a_{n+1}<a_n$　　B. $\forall n\in N^*, b_{n+1}>b_n$

C. 数列 $\{a_nb_n\}$ 存在最大项　　D. 数列 $\{a_n+b_n\}$ 不存在最小项

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 以下说法正确的是 ( )

A. 若 $x\sim B(n,\frac{1}{3}), D(2x+1)=8$，则 $n=6$

B. 随机变量 $\xi,\eta$，若 $\eta=3\xi+1$，则 $E(\eta)=3E(\xi)+1$

C. 若 $A\subseteq B, P(A)=0.4, P(B)=0.6$，则 $P(A|B)=\frac{2}{3}$

D. 若 $\xi\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(\xi<4)=0.618$，则 $P(0<\xi<4)=0.236$

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $R$，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=a-\log_2x$. 则下列结论正确的是 ( )

A. $f(1)=1$　　B. $f(8)=-1$　　C. $\sum_{k=1}^{206}f(k)=-1$　　D. $\sum_{k=1}^{100}kf(k)=50$

11. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F$，定点 $M(a,4)$ 和动点 $A,B$ 都在抛物线 $C$ 上，且 $\Delta MOF$（其中 $O$ 为坐标原点）的面积为3，则下列说法正确的是 ( )

A. 抛物线的标准方程为 $y^2=8x$

B. 设点 $R$ 是线段 $AF$ 的中点，则点 $R$ 的轨迹方程为 $y^2=3x-\frac{9}{4}$

C. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$（点 $A$ 在第一象限），则直线 $AB$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$

D. 若弦 $AB$ 的中点 $N$ 的横坐标2，则 $|AB|$ 弦长的最大值为7

12. 黄金分割是指将整体一分为二，较小部分 $a$ 与较大部分 $b$ 的比值等于较大部分 $b$ 与整体部分 $a+b$ 的比值，其比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，这个比例被公认为是最能引起美感的比例. 四名同学对此展开了探究，下列说法中正确的是 ( )

A. 若椭圆 $\Gamma$ 的焦点在 $x$ 轴上，上顶点为 $B$，右顶点为 $A$，左焦点为 $F$. 小欧提出只要满足 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，椭圆 $\Gamma$ 的离心率就等于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

B 一顶角等于36°的等腰三角形，小斯通过正、余弦定理和二倍角公式，算得该三角形底边长与

腰长的比值等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C.. 假设 $n\in N^*$，小莱发现若公比大于 0 的等比数列$\{a_n\}$与著名的斐波那契数列的递推公式 $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ 相同，则数列$\{a_n\}$的公比等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. 小利在阅读时了解到：古老的雅典帕提农神庙，其柱顶至屋顶的距离 $a$ 与柱高 $b$ 满足$\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$，则$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知多项式$(x+1)^5-(x-3)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$ 则 $x^3$ 的系数为______.

14. 已知 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\tan2\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-2}$，则 $\tan\alpha=$______.

15. "几何之父"欧几里得最著名的著作《几何原本》是欧洲数学的基础，总结了平面几何五大公设，被广泛的认为是历史上最成功的教科书.《几何原本》中提出了面积射影定理：平面图形射影面积等于被射影图形的面积 $S$ 乘以该图形所在平面与射影面所夹角的余弦. 已知正三棱台的上、下底面边长分别为 5、13，侧面与底面成 30°角，则它的侧面积等于________.

16. 若过 $x$ 轴上任意点 $A(a,0)(a>0)$ 可作曲线 $f(x)=e^x-kx$ 两条切线，则 $k$ 的取值范围________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 记 $S_n$ 为等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和，$S_2=5S_1$，$S_3=4(S_2+1)$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若 $2^nb_n=a_n+1$，求$\{b_n\}$的前 $n$ 项和 $T_n$.

18. (12 分) 为提高高三学生身体素质，鼓励积极参加体育锻炼，某校在高三学生中随机抽取了 100 名男生和 100 名女生，利用一周时间对他们的身体各项运动指标(高中年龄段指标)进行考察，得到综合素质指标评分，评分结果分为两类：80 分以上为达标，80 分以下为不达标，统计结果如下表：

| | 达标 | 不达标 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男生 | 40 | 60 | 100 |
| 女生 | 30 | 70 | 100 |
| 合计 | 70 | 130 | 200 |

(1) 能否有 95% 的把握认为"运动达不达标与性别有关"？

(2) 按分层抽样的方法抽取 7 位达标学生，再从中选出 3 人为其他同学介绍经验，记这 3 人中男生个数记为 $X$，求 $X$ 的分布列及数学期望。

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

19. (12 分)已知 $\Delta ABC$ 中内角 $A,B,C$ 所对边分别为 $a,b,c$,$b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$.

(1)求 $\angle A$;

(2)若 $BC$ 边上一点 $D$,满足 $BD=2CD$ 且 $AD=\sqrt{3}$,求 $\Delta ABC$ 的面积最大值.

20. (12 分)一年一度的创意设计大赛开幕了. 今年小王从世界名画《永恒的记忆》中获得灵感,创作出了如图 1 的《垂直时光》. 已知《垂直时光》是由两块半圆形钟组件和三根指针组成的,它如同一个标准的圆形钟沿着直径 $MN$ 折成了直二面角(其中 $M$ 对应钟上数字 3,$N$ 对应钟上数字 9). 设 $MN$ 的中点为 $O$,若长度为 2 的时针 $OA$ 指向了钟上数字 8,长度为 3 的分针 $OB$ 指向了钟上数字 12. 现在小王准备安装长度为 3 的秒针 $OC$(安装完秒针后,不考虑时针与分针可能产生的偏移;不考虑三根指针的粗细).

(1)若秒针 $OC$ 指向了钟上数字 4,如图 2. 连接 $NA$、$BC$,若 $NA$ // 平面 $OBC$. 求半圆形钟组件的半径;

(2)若秒针 $OC$ 指向了钟上数字 5,如图 3. 设四面体 $OABC$ 的外接球球心为 $G$,求二面角 $A$-$OG$-$C$ 的余弦值.

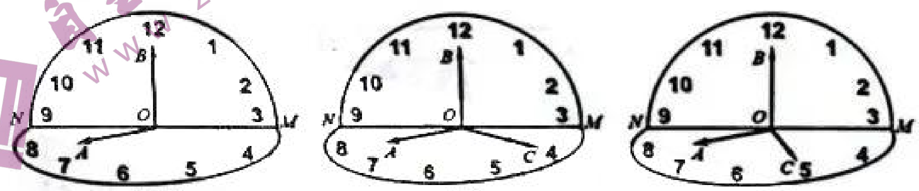


图 1　　图 2　　图 3

21. (12 分)设函数 $f(x)=x\ln x+1-ax$;

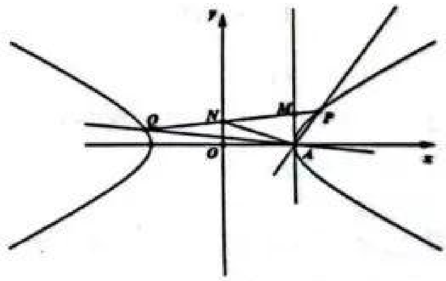
(1)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求实数 $a$ 的取值范围;

(2)在(1)的条件下,证明:$e^{x-1}f(x)\geqslant a(x^2-xe^{x-1})$.

22. (12 分)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,渐近线方程为 $y\pm\frac{x}{2}=0$,点 $A(2,0)$在 $C$ 上;

(1)求双曲线 $C$ 的方程;

(2)过点 $A$ 的两条直线 $AP,AQ$ 分别与双曲线 $C$ 交于 $P,Q$ 两点(不与 $A$ 点重合),且两条直线的斜率 $k_1,k_2$ 满足 $k_1+k_2=1$,直线 $PQ$ 与直线 $x=2$,$y$ 轴分别交于 $M,N$ 两点,求证:$\Delta AMN$ 的面积为定值。



# 江西智学联盟体 2023－2024 学年高三第一次联考

## 数学参考答案及解析

| 序号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | C | D | B | B | C | B | D | BCD | CD | BCD | ABD |

1. D　$(C_UA)\cap B=\{0,4\}$

2. C　设 $z=a+2i$，$\sqrt{a^2+4}=3$，$\therefore a=\sqrt{5}$，$\therefore z=\sqrt{5}+2i$

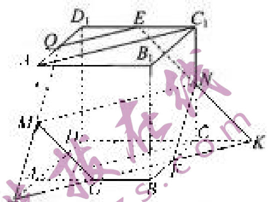
3. D　$\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b})$，$\therefore |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\begin{cases}|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-5,\end{cases}$　$\therefore |\vec{b}|=\sqrt{7}$

4. B　因为随着 $x$ 的增大，$y$ 也在增大，所以 $x,y$ 成正相关，并且 $\bar{x}=6$，$\bar{y}=11$，故选 B.

5. B　$\gamma$ 为钝角最大，令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$f(x)$ 在 $(0,e)$ 单调递增，$(e,+\infty)$ 单调递减，故 $f(e)>f(\pi)$，$\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$，即 $e^{\pi}>\pi^{e}$，故 $\alpha>\beta$，$\therefore \gamma>\alpha>\beta$.

6. C　$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$，$\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}\right]$，则 $\dfrac{7\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{11\pi}{2}$，即 $\dfrac{19}{6}\leqslant\omega<\dfrac{31}{6}$.

7. B　如图所示，$M,N$ 分别是 $AA_1,CC_1$ 中点，则 $MN\,//\,A_1C_1\,//\,AC$，作 $QE\,//\,A_1C_1$，交 $C_1D_1$ 于 $E$，连接 $EN$，并延长交 $DC$ 的延长线于点 $K$，连接 $QM$，并延长交 $DA$ 的延长线于点 $T$，连接 $TK$ 交 $AB$ 于点 $G$，交 $BC$ 于点 $F$，则 $QENFGM$ 为过 $M,N,Q$ 三点的截面. 由面面平行的性质定理得 $TK\,//\,QE$，从而有 $TK\,//\,AC$，$A_1Q=1$，$D_1Q=2$，则 $D_1Q=D_1E=2$，$C_1E=A_1Q=1$，因为 $N$ 是 $CC_1$ 中点，$C_1E\,//\,CK$，所以 $CK=C_1E=1$，又因为 $TK\,//\,AC$，所以 $CF=CK=1$，同理 $AG=1$，$BG=BF=2$，$QE=2\sqrt{2}$，$MN=3\sqrt{2}$，$EN=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，梯形 $QENM$ 是等腰梯形，且梯形 $QENM$ 与梯形 $FGMN$ 全等，高为 $h=\sqrt{EN^2-(\dfrac{MN-QE}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$，截面面积 $S=2\times\dfrac{1}{2}(QE+MN)h=\dfrac{5\sqrt{22}}{2}$. 故选：B.




8. D　$a_1=2$，$a_1a_2=3\Rightarrow a_2=\dfrac{3}{2}$，同理 $a_3=\dfrac{4}{3}$，由数学归纳法可知 $a_n=\dfrac{n+1}{n}$，

故 $b_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，易知 A 正确。

令 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，$x\in(0,1]$，$f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

易知 $\ln x\leqslant x-1$，$x=1$ 时“＝”成立，故 $\ln(\dfrac{1}{1+x})\leqslant\dfrac{1}{1+x}-1$，即 $1-\dfrac{1}{1+x}-\ln(1+x)\leqslant 0$

$x=0$ 时“＝”成立，$\therefore f(x)$ 在 $x\in(0,1]$ 单调递减 $\Rightarrow f(\dfrac{1}{n})<f(\dfrac{1}{n+1})$，即 $n\ln(1+\dfrac{1}{n})<(n+1)\ln(1+$

$\frac{1}{n+1})$

即 $b_{n+1}>b_n$，故 B 正确.

由 $\ln(1+x)\leqslant x$，$x=0$ 时“=”成立，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\to x$，$\frac{\ln(1+x)}{x}\to 1$，故 $n\to+\infty$ 时，$(1+\frac{1}{n})^n\to e$，

即 $b_n\to e$

$a_1\cdot b_1=4$，$n\to+\infty$ 时，$a_nb_n\to e<4$，故 $\{a_nb_n\}$ 存在最大项，C 正确.

$a_3+b_3=\frac{4}{3}+(\frac{3}{4})^3=\frac{100}{27}\approx 3.7<e+1$，故 $\{a_n+b_n\}$ 存在最小项，D 不正确. 故选 D.

9. BCD

A. $D(2x+1)=8$，$D(x)=2=n\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})\Rightarrow n=9$，故 A 错；

B. $E(\eta)=E(3\xi+1)=3E(\xi)+1$，故 B 对；

C. $\because A\subseteq B\therefore P(AB)=P(A)=0.4\therefore P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}$，故 C 对；

D. $\because \xi\sim N(2,\sigma^2)\therefore P(0<\xi<4)=2[P(\xi<4)-0.5]=2(0.618-0.5)=0.236$，故 D 对.

故选 BCD.

10. CD

$f(x)$ 关于 $(1,0)$，$x=2$ 对称，$\therefore T=4$，$f(1)=0\Rightarrow a=0$，故当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=-\log_2 x$，

$f(8)=-f(2)=-(-1)=1$，A，B 错误，$f(1)=0$，$f(2)=-1$，$f(3)=0$，$f(4)=1$，

$f(5)=0$，$f(6)=-1$，$f(7)=0$，$f(8)=1$，…故成周期重复出现.

$\therefore \sum_{k=1}^{206}f(k)=-1$，$\sum_{k=1}^{100}kf(k)=50$，C，D 正确. 故选 CD.

11. BCD

A. $S=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times 4=p=3$，故 A 错误；

B. $x_R=\frac{x_A+\frac{3}{2}}{2}$，$y_R=\frac{y_A}{2}$，则 $x_A=2x_R-\frac{3}{2}$，$y_A=2y_R$，代入 $y^2=6x$，得 $y^2=3x-\frac{9}{4}$，B 正确；

C. $|\overrightarrow{AF}|=\frac{3}{1-\cos\theta}$，$|\overrightarrow{FB}|=\frac{3}{1+\cos\theta}$，$|\overrightarrow{AF}|=3|\overrightarrow{FB}|$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，C 正确；

D. $\begin{cases}x=my+t\\ y^2=6x\end{cases}\Rightarrow y^2-6my-6t=0\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=6m\\ y_1y_2=-6t\end{cases}$，$x_1+x_2=4=m(y_1+y_2)+2t$，则 $2t=4-6m^2$，

$|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{36m^2+24t}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{48-36m^2}=\sqrt{-36m^4+12m^2+48}$，

当 $m^2=\frac{1}{6}$ 时，$|AB|_{max}=7$，D 正确. 故选 BCD.

12. ABD

解析：对于 A，设椭圆 $\Gamma$ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $A(a,0)$，$B(0,b)$，$F(-c,0)$，

由 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，知 $b^2=ac$，即 $c^2+ac-a^2=0$，即 $e^2+e-1=0$，可得 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，故 A 正确；

对于 B，设该三角形底边长为 $x$，腰长为 $y$，由正弦定理得 $\frac{x}{y}=\frac{\sin 36°}{\sin 72°}=\frac{1}{2\cos 36°}$，又由余弦定理得 $\cos 36°$

$=\dfrac{2y^2-x^2}{2y^2}$,可得$\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-\dfrac{2x}{y}+1=0$,即$\left(\dfrac{x}{y}-1\right)\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{x}{y}-1\right]=0$,

由于$\dfrac{x}{y}\neq1$,故$\dfrac{x}{y}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,故 $B$ 正确;(注:本选项也可以使用作底角的角平分线,构造相似三角形的方法,证明略.)

对于 C,设数列$\{a_n\}$的公比为$q>0$,则$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$,依题意有$q^2-q-1=0$,解得$q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,故 C 错误;

对于 D,设$\log_4a=\log_6b=\log_9(a+b)=k$,则$a=4^k,b=6^k,a+b=9^k$,可得$b^2=a(a+b)$,即$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{a}{b}-1=0$,解得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,故 D 正确. 故选 ABD.

13. 22

解:$(x+1)5$ 的展开式中含有 $x^3$ 的项为 $10x^3$,$(x-3)^4$ 的展开式中含有 $x^3$ 的项为 $-12x^3$. 故 $x^3$ 的系数为 22.

14. $-\sqrt{15}$

解:$\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,$\sin\alpha<0$,$\cos\alpha>0$,$\tan2\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-2}\Rightarrow2\cos\alpha(\cos\alpha-2)=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow2\cos^2\alpha-4\cos\alpha=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$,$\therefore\tan\alpha=-\sqrt{15}$.

15. 72

解析:依题意,正三棱台的上、下底面的面积分别为$\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$、$\dfrac{169\sqrt{3}}{4}$,则侧面在底面的射影面积为$\dfrac{169\sqrt{3}}{4}-\dfrac{25\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$,设侧面积为 $S$,由面积射影定理知 $S\cos30°=36\sqrt{3}$,可得 $S=72$. 故侧面积等于 72.

16. $0<k<e$

解:设 $x$ 轴上任意一点 $A(a,0)(a>0)$,曲线上一点,$M(x_0,y_0)$,$f'(x)=e^x-k$

在 $A$ 点的切线方程 $y-y_0=(e^{x_0}-k)(x-x_0)$.

把 $A$ 点代入切线方程得 $0-(e^{x_0}-kx_0)=(e^{x_0}-k)(a-x_0)$

得:$ak=(a+1-x_0)e^{x_0}$

令 $g(x)=(a+1-x)e^x$,则 $g'(x)=(a-x)e^x$,$g(x)$在$(-\infty,a)$单调递增,$(a,+\infty)$单调递减

当 $x\to-\infty$,$g(x)\to0$. $\because ak=(a+1-x_0)e^{x_0}$要有两个解,

对任意 $a>0$,则 $k>0$;对任意 $a>0$,则 $k<\dfrac{e^a}{a}$,令 $t(a)=\dfrac{e^a}{a}$,$t'(a)=\dfrac{(a-1)e^a}{a^2}$,

$t(a)$在$(0,1)$单调递减,在$(1,+\infty)$单调递增,则 $k<e$. $\therefore0<k<e$.

17. 解:(1)$\begin{cases}S_2=5S_1\\S_3=4(S_2+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_1q=5a_1\\a_1+a_1q+a_1q^2=4(a_1+a_1q+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=4\\q=4\end{cases}$ (4 分)

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=4\cdot4^{n-1}=4^n(n\in N^*)$ (5 分)

(2)由已知得：$b_n=\frac{a_n+1}{2^n}=2^n+\frac{1}{2^n}$，∴ $T_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{\frac{1}{2}\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$ （8 分）

∴ $T_n=2^{n+1}-2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n-1(n\in N^*)$. （10 分）

18. 解：(1)假设 $H_0$：有 95% 的把握认为运动达不达标与性别有关。

$$K^2=\frac{200\times(40\times70-60\times30)^2}{(40+60)\times(30+70)\times(40+30)\times(60+70)}\approx2.198<3.841$$

∴ 没有 95% 的把握认为运动达不达标与性别有关。 （4 分）

(2) $X$ 的可能取值为 0,1,2,3（5 分），$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$（9 分），$X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{4}{35}$ |

（10 分）

数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$ （12 分）

（另法：$E(X)=\frac{nM}{N}=\frac{3\times4}{7}=\frac{12}{7}$）.

19. 解：(1) $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$ 由正弦定理得 $\sin B\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})=\sin A\sin B$（2 分）即 $\cos\frac{A}{2}=\sin A$

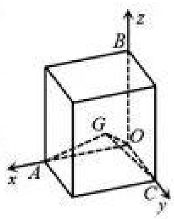
即 $\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$（4 分）即 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，∵ $A\in(0,\pi)$ ∴ $\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，∴ $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$ ∴ $A=\frac{\pi}{3}$ （6 分）

(2) $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$（8 分），由题意得由 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ 即 $\overrightarrow{AD}^2=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

$\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2 3=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}bc(\frac{1}{2})+\frac{4}{9}b^2=\frac{1}{9}(c^2+4b^2+2bc)\geqslant\frac{1}{9}(4bc+2bc)$，∴ $bc\leqslant\frac{9}{2}$ （10 分）

当且仅当 $2b=c$ 取等号（11 分），$S\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}$，$S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{8}$. （12 分）

20. 解析：(1)由 $NA$∥平面 $OBC$，$NA\subset$ 平面 $OAC$，平面 $OAC\cap$ 平面 $OBC=OC$，可得 $NA$∥$OC$，故 $\angle MOC=\angle ONA=30°$（3 分），又由 $\angle NOA=30°$，知 $\triangle NOA$ 为等腰三角形，$\angle NAO=120°$，$AO=2$，由正弦定理得 $NO=AO\cdot\frac{\sin\angle NAO}{\sin\angle ANO}=2\sqrt{3}$. 故半圆形钟组件的半径等于 $2\sqrt{3}$. （5 分）




(2)依题意，二面角 $B$-$MN$-$A$ 为直二面角，$MN$ 为交线，$OB\perp MN$，故 $OB\perp$ 平面 $OAC$. 又 $OA\perp OC$，故 $OA$、$OB$、$OC$ 两两垂直. 以 $O$ 为原点，$OA$、$OC$、$OB$ 为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴建立空间直角坐标系 （6 分）.

如图，$O(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,3,0)$，$B(0,0,3)$. 将四面体 $OABC$ 补成长方体，知 $G$ 即为长方体的中心，得 $G(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$. 则 $\overrightarrow{OG}=(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{OA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{OC}=(0,3,$

0).(8 分)设平面 $OAG$ 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{OG}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1=0\\ x_1+\frac{3}{2}y_1+\frac{3}{2}z_1=0\end{cases}$，取 $y_1=1$，

得 $\vec{m}=(0,1,-1)$.(9 分)设平面 $OCG$ 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OG}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}3y_2=0\\ x_2+\frac{3}{2}y_2+\frac{3}{2}z_2=0\end{cases}$，取 $x_2=-3$，得 $\vec{n}=(-3,0,2)$. (10 分)

则 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{-2}{\sqrt{2}\times\sqrt{13}}=-\frac{\sqrt{26}}{13}$.(11 分)故二面角 $A$-$OG$-$C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{26}}{13}$.

(12 分)

21. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$(1 分)，$f(x)\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant\frac{x\ln x+1}{x}=\ln x+\frac{1}{x}$ (2 分)

令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，由 $g'(x)>0\Rightarrow x>1$，$g'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增(3 分)，$\therefore g(x)\geqslant g(1)=1$(4 分)，$\therefore a\leqslant 1$ (5 分).

(2) 要证 $e^{x-1}f(x)\geqslant a(x^2-xe^{x-1})\Leftrightarrow e^{x-1}(x\ln x+1)\geqslant ax^2$，又 $\because a\leqslant 1$，即只要证 $e^{x-1}(x\ln x+1)\geqslant x^2\Leftrightarrow\ln x+\frac{1}{x}\geqslant\frac{x}{e^{x-1}}$(7 分)，由(1)知，$\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 1$，故只要证 $1\geqslant\frac{x}{e^{x-1}}\Leftrightarrow e^{x-1}-x\geqslant 0$(9 分)，令 $h(x)=e^{x-1}-x(x>0)$，$h'(x)=e^{x-1}-1$，由 $h'(x)>0\Rightarrow x>1$，$h'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(1)=0$(11 分)，即 $e^{x-1}-x\geqslant 0$，综上，$e^{x-1}f(x)\geqslant a(x^2-xe^{x-1})$. (12 分)

22. 解：(1) $\because a>0,b>0$，易知 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\\ a=2\end{cases}\Rightarrow b=1\Rightarrow$ 方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. (4 分)

(2) 易知 $PQ$ 斜率存在，设方程为 $y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1\end{cases}$

$\Rightarrow(1-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-4=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8km}{1-4k^2}\\ x_1x_2=-\frac{4m^2+4}{1-4k^2}\\ \Delta>0\end{cases}$(6 分)$\Rightarrow$

$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{2kx_1x_2+(m-2k)(x_1+x_2)-4m}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=1\Rightarrow(m+2k)(m+2k-1)=0$ (8 分)

1) $m+2k=0$，$\Rightarrow PQ:y=kx-2k$，过 $A(2,0)$ 舍去 (10 分)，

2) $m+2k-1=0$，$\Rightarrow PQ:y=kx-2k+1$，过点 $(2,1)$，

$\therefore PQ$ 与 $x=2$ 交于点 $M(2,1)$，故 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$(定值) (12 分)

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。