

高三数学试题参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合的交集运算,考查运算求解能力.

因为 $A=(0,3], B=(-2,2)$, 所以 $A \cap B=(0,2)$.

2. B 【解析】本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力.

因为 $z=1+2i+\frac{1+2i}{2-i}=1+3i$, 所以复数 z 的虚部为 3.

3. C 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

$\because \sin(\theta-\pi)=\frac{4}{5}, \therefore \sin \theta=-\frac{4}{5}, \therefore \cos \theta=\pm \frac{3}{5}$. 又 $\because \tan \theta < 0, \therefore \cos \theta=\frac{3}{5}, \therefore \sin 2\theta=2 \sin \theta \cos \theta=-\frac{24}{25}$.

4. A 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的思想.

画出可行域(图略)知,当 $l: z=2x+y$ 平移到过点 $(2,1)$ 时, z 取得最大值,最大值为 5.

5. B 【解析】本题考查平均数与方差,考查数据分析能力.

设这个班有 n 个同学,分数分别是 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$,

假设第 i 个同学的成绩录入 n 两次,第一次计算时,总分是 $(n+1)\bar{x}$, 方差为

$$s^2 = \frac{1}{n+1} [(a_1 - \bar{x})^2 + (a_2 - \bar{x})^2 + \dots + (a_{i-1} - \bar{x})^2 + 2(a_i - \bar{x})^2 + (a_{i+1} - \bar{x})^2 + \dots + (a_n - \bar{x})^2];$$

第二次计算时, $\bar{x}_1 = \frac{(n+1)\bar{x} - \bar{x}}{n} = \bar{x}$, 方差

$$s_1^2 = \frac{1}{n} [(a_1 - \bar{x})^2 + (a_2 - \bar{x})^2 + \dots + (a_{i-1} - \bar{x})^2 + (a_i - \bar{x})^2 + (a_{i+1} - \bar{x})^2 + \dots + (a_n - \bar{x})^2] = \frac{n+1}{n} s^2.$$

故有 $\bar{x} = \bar{x}_1, s^2 < s_1^2$.

6. D 【解析】本题考查线面垂直的判定、性质定理,考查逻辑推理能力.

结合甲、乙、丙三人的说法可知,当 $\alpha \perp \beta, m \perp n, n // l$ 正确时,直线 m, n 为异面直线. 故选 D.

7. B 【解析】本题考查正弦定理以及三角恒等变换,考查运算求解能力.

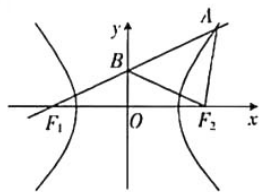
由正弦定理可知, $\sin B = \sin A \cos C + 2 \sin C \cos A$, 则 $\cos A \sin C = 2 \sin C \cos A$, 则 $a = \frac{1}{2}$.

8. B 【解析】本题考查双曲线的定义以及几何性质,考查数形结合思想和运算求解的能力.

由对称性可知 $BF_2 = BF_1$, 所以 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $6a$. 即 $AF_1 + AF_2 = 6a$. 又 $AF_1 - AF_2 = 2a$, 所以 $AF_1 = 4a, AF_2 = 2a$. 因为 B 为 AF_1 的中点, 所以 $AB = BF_1 = 2a$, 则 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 所以 $\angle ABF_2 = \frac{\pi}{3}, \angle F_1BF_2 = \frac{2\pi}{3}, \angle F_1BO = \frac{\pi}{3}$.

又因为 $OF_1 = c$, 所以在 $\text{Rt}\triangle F_1BO$ 中, $\sin \angle F_1BO = \frac{OF_1}{BF_1} = \frac{c}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\frac{c}{a} = \sqrt{3}, \frac{b}{a} = \sqrt{2}$, 即双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{2}x$.



9. C 【解析】本题考查函数的性质,考查逻辑推理能力.

设点 (x, y) 是函数 $y = \lg x, x \geq 1$ 图象上任意一点, 它关于点 $(1, 0)$ 的对称点为 (x', y') ,

$$\text{则} \begin{cases} x+x'=2. \\ y+y'=0. \end{cases} \begin{cases} x=2-x', \\ y=-y', \end{cases} \text{代入 } y=\lg x, \text{得 } -y'=\lg(2-x'), \therefore y'=-\lg(2-x'), x' \leq 1.$$

\therefore 函数 $y = \lg x, x \geq 1$ 的图象与函数 $y = -\lg(2-x), x \leq 1$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称.

即 $f(x) = \begin{cases} \lg x, & x \geq 1 \\ -\lg(2-x), & x < 1 \end{cases}$ 的图象关于点(1,0)对称,易知 $f(x)$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递增.

10. C 【解析】本题考查三角函数的图象,考查数形结合的思想.

$$\text{令 } \theta = \omega x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3}], 2\pi \leq \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3} < 3\pi, \text{ 则 } \frac{28}{9} \leq \omega < \frac{40}{9}.$$

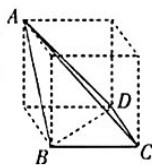
$$\text{因为 } f(0) + f(\frac{3\pi}{4}) = 0, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3}),$$

$$\text{即 } \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$\text{即 } \omega = \frac{8}{9} + \frac{8}{3}k \text{ 或 } \omega = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}k, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } \omega \text{ 为 } \frac{32}{9} \text{ 或 } 4.$$

11. A 【解析】本题考查四面体的外接球,考查空间想象能力.

由 $AB=AD=BD=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}CD=\sqrt{2}$,可知 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形, $\triangle ABD$ 为等边三角形, $AC=\sqrt{3}$,所以四面体 $ABCD$ 可补成正方体,如图所示. AC 即为外接球直径 $2R$,则 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$,从而外接球表面积 $= 4\pi(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3\pi$.



12. B 【解析】本题考查导数的应用,函数与方程,考查数形结合与化归与转化的数学思想.

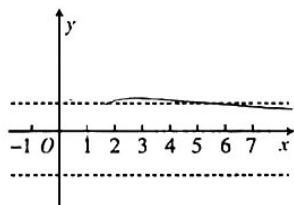
$$\text{由方程 } \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x + x} + m = 0, \text{ 可得 } \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\frac{\ln x}{x} + 1} + m = 0.$$

$$\text{令 } \frac{\ln x}{x} = t, \text{ 则有 } t + \frac{1}{t+1} + m = 0, \text{ 即 } t^2 + (m+1)t + m + 1 = 0.$$

$$\text{令函数 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增,在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

作出图象如下:



要使关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x + x} + m = 0$ 有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 ,且 $x_1 < x_2 < x_3$,

结合图象可得关于 t 的方程 $t^2 + (m+1)t + m + 1 = 0$ 一定有两个实根 $t_1, t_2 (t_1 < 0 < t_2 < \frac{1}{e}, t \neq -1)$,

$$\text{且 } \frac{\ln x_1}{x_1} = t_1, \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_3}{x_3} = t_2, t_1 + t_2 = -(m+1), t_1 t_2 = m+1.$$

$$\text{所以 } m+1 < 0, \frac{1}{e^2} + \frac{m+1}{e} + m+1 > 0, \text{ 解得 } -1 - \frac{1}{e^2 + e} < m < -1.$$

$$\text{故 } (1 - \frac{\ln x_1}{x_1}) \sqrt{(1 - \frac{\ln x_2}{x_2})(1 - \frac{\ln x_3}{x_3})} = (1 - t_1)(1 - t_2) = 1 - t_1 - t_2 + t_1 t_2 = 2m + 3 \in (1 - \frac{2}{e^2 + e}, 1).$$

13. $(-\infty, 0]$ 【解析】本题考查命题的否定,考查逻辑推理能力.

若原命题为假命题,则其否定“ $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > m$ ”为真命题, m 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

14. 2 【解析】本题考查平面向量的数量积公式,考查数形结合的思想.

设 O 为 AC 与 BD 的交点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AM}| \cos \angle MAO = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AO}| = 2$.

15. $\frac{4}{7}$ 【解析】本题考查排列组合, 考查逻辑推理能力.

这 8 支球队分为两组, 则一共有 $\frac{C_8^4 C_4^4}{A_2^2} = 35$ (种),

2 支种子队不在同一组, 则有 $\frac{C_6^3 C_3^3}{A_2^2} = 20$ (种), 故所求概率为 $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$.

16.2 【解析】本题考查抛物线的定义以及几何性质, 考查数形结合思想和运算求解的能力.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} y_1^2 = 8x_1, \\ y_2^2 = 8x_2, \end{cases}$ 所以 $y_1^2 - y_2^2 = 8x_1 - 8x_2$, 所以 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{y_1 + y_2}$.

取 AB 的中点 $M'(x_0, y_0)$, 分别过点 A, B 作准线 $x = -2$ 的垂线, 垂足分别为 A', B' . 因为 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, $\angle AMB = 90^\circ$, 所以 $|MM'| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) = \frac{1}{2}(|AA'| + |BB'|)$. 因为 M' 为 AB 的中点, 所以 MM' 平行于 x 轴. 因为 $M(-2, 2)$, 所以 $y_0 = 2$, 则 $y_1 + y_2 = 4$, 即 $k = 2$.

17. 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $3a_3 = 4a_1 + 4a_2$, 可得 $3q^2 - 4q - 4 = 0$, 解得 $q = 2$ 或 $q = -\frac{2}{3}$ (舍去).

..... 2 分

因为 $S_6 = 126$, 所以 $S_6 = \frac{a_1(1-2^6)}{1-2} = 126$; 解得 $a_1 = 2$, 4 分

所以 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 6 分

(2) $b_n = \frac{2}{\log_2 a_{2n-1} \cdot \log_2 a_{2n+1}} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$, 9 分

所以 $T_n = (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{2n}{2n+1}$ 12 分

18. (1) 证明: $\because ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, $\therefore BB_1 \perp$ 平面 ABC . 则 $BB_1 \perp BC$ 1 分

\because 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 A_1ABB_1 , 平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $A_1ABB_1 = BB_1$

$\therefore CB \perp$ 平面 A_1ABB_1 , $\therefore B_1D \perp BC$ 2 分

$\because BB_1 = 2AB = 2, ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, $\therefore B_1D = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}$.

$\therefore BB_1^2 = BD^2 + B_1D^2$, $\therefore B_1D \perp BD$ 4 分

又 $BD \cap BC = B$, $\therefore B_1D \perp$ 平面 BDC 5 分

(2) 解: $\because CC_1 \perp$ 平面 ABC , 二面角 $A-CC_1-B$ 的平面角为 $\angle ACB$, 即 $\angle ACB = 45^\circ$, $\therefore BC = 1$ 7 分

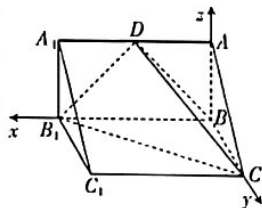
以 B 为原点, $\overrightarrow{BB_1}$ 的方向为 x 轴正方向, \overrightarrow{BC} 的方向为 y 轴正方向, \overrightarrow{BA} 的方向为 z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$,

则 $B_1(2, 0, 0), C(0, 1, 0), D(1, 0, 1), \overrightarrow{B_1C} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{B_1D} = (-1, 0, 1),$

$\overrightarrow{BA} = (0, 0, 1)$ 为平面 B_1BCC_1 的一个法向量. 9 分

设平面 DB_1C 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{B_1D} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ -x + z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 得 $y = 2, z = 1$, 则 $n = (1,$

$2, 1)$, $\cos \langle \overrightarrow{BA}, n \rangle = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot n}{|\overrightarrow{BA}| |n|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 所以二面角 $D-B_1C-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 12 分



19. 解: (1) 设点 $F(-c, 0), A(a, 0), P(-c, y_0)$, 则 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. 则 $y_0^2 = \frac{b^4}{a^2}$ 2 分

又直线 PA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{b^2-0}{-c-a} = -\frac{1}{2}$, 3 分

则 $2c^2+ac-a^2=0$, 即 $2e^2+e-1=0$, 解得 $e=\frac{1}{2}$, 所以椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$ 5 分

(2) 因为直线 PA 与 y 轴交于点 E(0,1), 所以直线 PA 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+1$, 则 A(2,0),

所以 $a=2, c=1, b=\sqrt{3}$, 即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 6 分

当直线 l 的斜率不存在时, MN 的方程为 $x=0$. 此时 $\frac{|EM|}{|EN|} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$, 不符合条件舍去. 7 分

当直线 MN 的斜率存在时, 设直线 MN 的方程为 $y=kx+1$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{EM}=(x_1, y_1-1), \overrightarrow{EN}=(x_2, y_2-1)$.

因为 $\overrightarrow{EM}+3\overrightarrow{EN}=\mathbf{0}$, 所以 $x_1=-3x_2$ 8 分

联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $x^2+8kx-8=0$, 所以 $\begin{cases} x_1+x_2 = \frac{-8k}{3+4k^2}, \\ x_1x_2 = \frac{-8}{3+4k^2}, \end{cases}$ 9 分

将 $x_1=-3x_2$ 代入得 $\begin{cases} -2x_2 = \frac{-8k}{3+4k^2}, \\ 3x_2^2 = \frac{8}{3+4k^2}. \end{cases}$ 所以 $3(\frac{4k}{3+4k^2})^2 = \frac{8}{3+4k^2}$, 11 分

所以 $k^2 = \frac{3}{2}, k = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以直线 l 的方程为 $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x+1$ 或 $y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x+1$ 12 分

20. 解: (1) 由题意, 知 X 的值可能为 1, 2, 3. 1 分

$P(X=1) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$ 2 分

$P(X=3) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ 3 分

$P(X=2) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{20}$ 4 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{5}$

..... 5 分

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{11}{20} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{39}{20}$ 6 分

(2) 若游戏进行 2 轮且小李获胜的概率为 $P = \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{45}$, 8 分

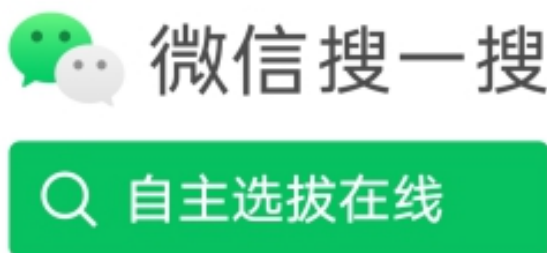
若游戏进行 3 轮且小李获胜的概率为 $P = (\frac{2}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{5}) \times \frac{1}{45} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} \times (\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{6}) \times \frac{1}{3}$

- $\times \frac{2}{6} = \frac{187}{8100}$, 11分
- 所以小李获胜的概率为 $\frac{1}{45} + \frac{187}{8100} = \frac{367}{8100}$ 12分
21. (1)解: $f(x) = \ln(x+1)$, $f(0) = 0$, 1分
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, 则 $f'(0) = 1$, 3分
- 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x$ 5分
- (2)证明: 因为 $0 < a \leq 1$, 所以 $\ln(x+a) \leq \ln(x+1)$.
- 又 $x \in [0, +\infty)$, 所以 $xf(x) \leq x \ln(x+1)$ 7分
- 易证得 $\ln(x+1) \leq x$, 所以 $xf(x) \leq x^2$ 9分
- 令 $h(x) = \frac{x^2}{e^x}$, $x \in [0, +\infty)$, $h'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x}$. 当 $x \in [0, 2)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减. $h(x)_{\max} = h(2) = \frac{4}{e^2} < \frac{2}{3}$ 11分
- 所以, 当 $0 < a \leq 1$ 时, 对 $x \in [0, +\infty)$, 都有 $3xf(x) < 2e^x$ 成立. 12分
22. 解: (1) 由曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 得曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, 得 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 2分
- 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 1 = 0$ 4分
- (2) 将直线 l 的极坐标方程代入曲线 C 的极坐标方程, 得 $\rho^2 - 2\rho \cos \alpha - 1 = 0$ 6分
- 设 $A(\rho_1, \alpha)$, $B(\rho_2, \alpha)$.
- 则 $\rho_1 \cdot \rho_2 = -1 < 0$, 所以 $|OA| + |OB| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{4\cos^2 \alpha - 4} = \sqrt{6}$.
- 则 $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 8分
- 所以直线 l 的直角坐标方程为 $y = \pm x$ 10分
23. (1) 解: 由题可得 $2|x-1| < 3x-4$, 所以 $-(3x-4) < 2(x-1) < 3x-4$, 3分
- 解得 $x > 2$. 所以不等式 $f(x) < 2x-4$ 的解集为 $(2, +\infty)$ 5分
- (2) 证明: $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 1, \\ -3x+2, & x < 1. \end{cases}$ 则 $m = f(1) = -1$ 7分
- 则 $(a+b) + (b+c) = 1$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = (\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c})[(a+b) + (b+c)] = 2 + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} \geq 4$,
- 当且仅当 $a=c$ 时, 取等号. 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》