

## 南通市 2023 届高三第一次调研测试

### 数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x | 2 < x < 4\}$ ，则  $A \cap B =$

- A.  $(2, 3]$       B.  $[1, 4)$       C.  $(-\infty, 4)$       D.  $[1, +\infty)$

2. 已知向量  $a, b$  满足  $|a| = 1, |b| = 2, \langle a, b \rangle = \frac{2\pi}{3}$ ，则  $a \cdot (a + b) =$

- A.  $-2$       B.  $-1$       C.  $0$       D.  $2$

3. 在复平面内，复数  $z_1, z_2$  对应的点关于直线  $x - y = 0$  对称。若  $z_1 = 1 - i$ ，则  $|z_1 - z_2| =$

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $2$       C.  $2\sqrt{2}$       D.  $4$

4. 2022 年神舟接力腾飞，中国空间站全面建成，我们的“太空之家”遨游苍穹。太空中飞船与空间站的对接，需要经过多次变轨。某飞船升空后的初始运行轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆，其远地点（长轴端点中离地面最远的点）距地面  $S_1$ ，近地点（长轴端点中离地面最近的点）距地面  $S_2$ ，地球的半径为  $R$ ，则该椭圆的短轴长为

- A.  $\sqrt{S_1 S_2}$       B.  $2\sqrt{S_1 S_2}$   
C.  $\sqrt{(S_1 + R)(S_2 + R)}$       D.  $2\sqrt{(S_1 + R)(S_2 + R)}$

5. 已知  $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \cos \alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) =$

- A.  $-\frac{7}{25}$       B.  $\frac{7}{25}$       C.  $-\frac{24}{25}$       D.  $\frac{24}{25}$

6. 已知随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 有下列四个命题:

甲:  $P(X > m+1) > P(X < m-2)$ ;      乙:  $P(X > m) = 0.5$ ;

丙:  $P(X \leq m) = 0.5$ ;      丁:  $P(m-1 < X < m) < P(m+1 < X < m+2)$ .

如果只有一个假命题, 则该命题为

- A. 甲      B. 乙      C. 丙      D. 丁

7. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(2x+1)$  为偶函数,  $f(x) = f(x+1) - f(x+2)$ ,

若  $f(1) = 2$ , 则  $f(18) =$

- A. 1      B. 2      C. -1      D. -2

8. 若过点  $P(t, 0)$  可以作曲线  $y = (1-x)e^x$  的两条切线, 切点分别为  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

则  $y_1 y_2$  的取值范围是

- A.  $(0, 4e^{-3})$       B.  $(-\infty, 0) \cup (0, 4e^{-3})$   
C.  $(-\infty, 4e^{-2})$       D.  $(-\infty, 0) \cup (0, 4e^{-2})$

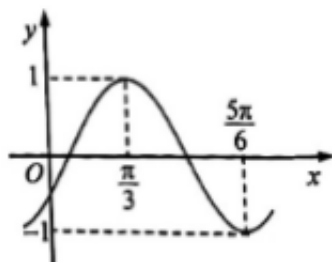
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ , 则

- A.  $AD_1 \parallel$  平面  $BOC_1$       B.  $BD \perp$  平面  $COC_1$   
C.  $C_1O$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$       D. 三棱锥  $C - BOC_1$  的体积为  $\frac{2}{3}$

10. 函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则

- A.  $\omega = 2$
- B.  $\varphi \geq \frac{\pi}{6}$
- C.  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{12}, 0)$  对称
- D.  $f(x)$  在区间  $(\pi, \frac{5\pi}{4})$  上单调递增



11. 一个袋中有大小、形状完全相同的 3 个小球, 颜色分别为红、黄、蓝. 从袋中先后无放回地取出 2 个球, 记“第一次取到红球”为事件  $A$ , “第二次取到黄球”为事件  $B$ , 则

- A.  $P(A) = \frac{1}{3}$
- B.  $A, B$  为互斥事件
- C.  $P(B|A) = \frac{1}{2}$
- D.  $A, B$  相互独立

12. 已知抛物线  $x^2 = 4y$  的焦点为  $F$ , 以该抛物线上三点  $A, B, C$  为切点的切线分别是  $l_1, l_2, l_3$ , 直线  $l_1, l_2$  相交于点  $D$ ,  $l_3$  与  $l_1, l_2$  分别相交于点  $P, Q$ . 记  $A, B, D$  的横坐标分别为  $x_1, x_2, x_3$ , 则

- A.  $\overline{DA} \cdot \overline{DB} = 0$
- B.  $x_1 + x_2 = 2x_3$
- C.  $|AF| \cdot |BF| = |DF|^2$
- D.  $|AP| \cdot |CQ| = |PC| \cdot |PD|$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1, \\ 2^{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $f(f(-2)) =$  \_\_\_\_\_.

14. 写出一个同时满足下列条件①②的等比数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

- ①  $a_n a_{n+1} < 0$ ; ②  $|a_n| > |a_{n+1}|$ .

14. 写出一个同时满足下列条件①②的等比数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

①  $a_n a_{n+1} < 0$ ; ②  $|a_n| > |a_{n+1}|$ .

15. 已知圆  $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ , 设直线  $x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$  与两坐标轴的交点分别为  $A, B$ ,

若圆  $O$  上有且只有一个点  $P$  满足  $|AP| = |BP|$ , 则  $r$  的值为\_\_\_\_\_.

16. 已知正四棱锥  $S-ABCD$  的所有棱长都为 1, 点  $E$  在侧棱  $SC$  上. 过点  $E$  且垂直于  $SC$  的平面截该棱锥, 得到截面多边形  $\Gamma$ , 则  $\Gamma$  的边数至多为\_\_\_\_\_,  $\Gamma$  的面积的最大值为\_\_\_\_\_.

(第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在①  $S_1, S_2, S_4$  成等比数列, ②  $a_4 = 2a_2 + 2$ , ③  $S_4 = S_4 + S_7 - 2$  这三个条件中任选两个,

补充在下面问题中, 并完成解答.

已知数列  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ .

注: 如果选择多个方案分别解答, 按第一个方案计分.

第二十二届卡塔尔世界杯足球赛 (FIFA World Cup Qatar 2022) 决赛中, 阿根廷队通过扣人心弦的点球大战战胜了法国队. 某校为了丰富学生课余生活, 组建了足球社团. 足球社团为了解学生喜欢足球是否与性别有关, 随机抽取了男、女同学各 100 名进行调查, 部分数据如右表所示.

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生		40	
女生	30		
合计			

(1) 根据所给数据完成右表, 并判断是否有 99.9% 的把握认为该校学生喜欢足球与性别有关?

(2) 社团指导老师从喜欢足球的学生中抽取了 2 名男生和 1 名女生示范点球射门. 已知男生进球的概率为  $\frac{2}{3}$ , 女生进球的概率为  $\frac{1}{2}$ , 每人射门一次, 假设各人射门相互独立, 求 3 人进球总次数的分布列和数学期望.

附:

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

19. (12分)

在  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $a \cos B - 2a \cos C = (2c - b) \cos A$ .

(1) 若  $c = \sqrt{3}a$ , 求  $\cos B$  的值;

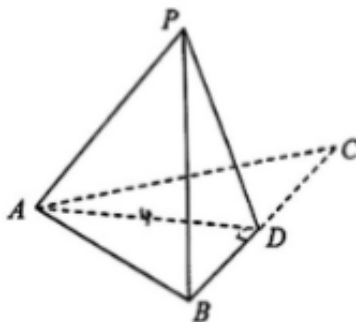
(2) 若  $b = 1$ ,  $\angle BAC$  的平分线  $AD$  交  $BC$  于点  $D$ , 求  $AD$  长度的取值范围.

20. (12分)

如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AD$  是  $BC$  边上的高. 以  $AD$  为折痕, 将  $\triangle ACD$  折至  $\triangle APD$  的位置, 使得  $PB \perp AB$ .

(1) 证明:  $PB \perp$  平面  $ABD$ ;

(2) 若  $AD = PB = 4, BD = 2$ , 求二面角  $B-PA-D$  的正弦值.



21. (12分)

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左顶点为  $A$ , 过左焦点  $F$  的直线与  $C$  交于  $P, Q$

两点. 当  $PQ \perp x$  轴时,  $|PA| = \sqrt{10}$ ,  $\triangle PAQ$  的面积为 3.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 证明: 以  $PQ$  为直径的圆经过定点.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{x}{ae^{x-1}}$  和  $g(x) = \frac{a + \ln x}{x}$  有相同的最大值.

(1) 求实数  $a$ ;

(2) 设直线  $y = b$  与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  共有四个不同的交点, 其横坐标

分别为  $x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ , 证明:  $x_1 x_4 = x_2 x_3$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线  
微信号：zizzsw



自主选拔在线  
微信号：zizzsw



自主选拔在线  
微信号：zizzsw