

洛阳市 2022——2023 学年高二质量检测 数学试卷（理）

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上。
2. 考试结束，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 1$ ，则 $f'(x_0) =$ ()

- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. -1

2. 已知随机变量 $X \sim N(3, \sigma^2)$ ，若 $P(X > 5) = 0.3$ ，则 $P(1 < X < 5) =$ ()

- A. 0.2 B. 0.4 C. 0.6 D. 0.7

3. 已知两条直线 $l_1: x + a^2y + 6 = 0$ ， $l_2: (a-2)x + 3ay + 2a = 0$ ，若 $l_1 \parallel l_2$ ，则 $a =$ ()

- A. -1 或 0 或 3 B. -1 或 3 C. 0 或 3 D. -1 或 0

4. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层灯数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

5. 已知随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.3	0.4

则 $D(2X+7) =$ ()

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 9

6. 已知直线 $y = x - 2$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点，若 D 为线段 AB 的中点， O 为坐标原点，则直线 OD 的斜率为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 曲线 $y = \frac{\sin x}{x}$ 在点 $M(\pi, 0)$ 处的切线方程是 ()

- A. $x + \pi y - \pi = 0$ B. $x - \pi y - \pi = 0$ C. $\pi x + y - \pi = 0$ D. $\pi x - y - \pi = 0$

8. 某学校有 A, B 两家餐厅，王同学第 1 天午餐时随机地选择一家餐厅用餐。如果第 1 天去 A 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.5；如果第 1 天去 B 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.9。请问王同学第 2 天去 A 餐厅用餐的概率是 ()

- A. 0.8 B. 0.7 C. 0.6 D. 0.45

9. 已知点 P 为直线 $y = x + 1$ 上的一点， M, N 分别为圆 $C_1: (x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$ 与圆 $C_2: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上的点，则 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 ()

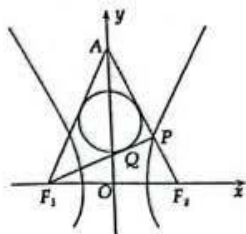
- A. 5 B. 3 C. 2 D. 1

10. 平面内有两组平行线，一组有 6 条，另一组有 8 条，这两组平行线相交，由这些平行线可以构成平行四边形的个数为 ()

- A. 14 B. 48 C. 91 D. 420



11. 如图, F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, $|F_1F_2| = 6$, 点 P 在双曲线的右支上, F_2P 的延长线与 y 轴交于点 A , $\triangle APF_1$ 的内切圆在边 PF_1 上的切点为 Q , 若 $|PQ| = \sqrt{3}$, 则此双曲线的渐近线方程为 ()



- A. $y = \pm\sqrt{2}x$ B. $y = \pm\sqrt{3}x$ C. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ D. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

12. 已知 $f'(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数, 对于任意的实数 x , 都有 $f(x) = \frac{f(-x)}{e^{2x}}$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) + f'(x) > 0$. 若 $f(a+1) \geq e^{2a-1}f(3a)$, 则实数 a 的取值 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$
C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 将 5 名学生分配到 4 个社区参加志愿服务, 每个社区至少 1 名学生, 则不同的分配方法有 _____ 种 (用数字作答).

14. 投掷一枚骰子, 当出现 5 点或 6 点时, 就说这次试验成功, 记在 30 次试验中成功的次数为 X , 则 $E(X) =$ _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{3}{2}$, 且满足 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$. 若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < 81$, 则 n 的最大值为 _____.

16. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DA} + \mu\overrightarrow{DC}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$, 现有如下四个命题:

- ①存在 λ, μ , 使得 $B_1P \parallel$ 平面 A_1DC_1 ;
②当 $\lambda = \mu = 1$ 时, $D_1P \perp$ 平面 A_1DC_1 ;
③当 $\lambda = \mu$ 时, C_1P 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的最小值为 $\frac{\pi}{4}$;
④若点 P 到直线 BB_1 与到直线 AD 的距离相等, 则点 P 的轨迹是线段.

其中所有真命题的序号是 _____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 的展开式中, 第 2 项、第 3 项、第 4 项的二项式系数成等差数列.

- (1) 求 n 的值;
(2) 求展开式中含 $\frac{1}{x^2}$ 的项.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，其前 n 项和为 S_n ，且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$ ， $S_6 = 63$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

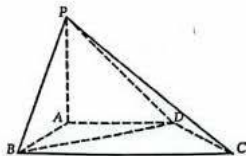
(2) 若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ， b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项，求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和。

19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \perp AD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AP = AB = AD = 1$ ，且直线 PB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 。

(1) 求 BC 的长；

(2) 求二面角 $D-PB-C$ 的余弦值。



20. (12 分)

已知圆 $S: x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$ ，点 P 是圆 S 上的动点， T 是抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点， Q 为 PT 的中点，过 Q 作 $QG \perp PT$ 交 PS 于 G ，设点 G 的轨迹为曲线 C 。

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 过 $S(-2, 0)$ 的直线 l 交曲线 C 于点 M, N ，若在曲线 C 上存在点 A ，使得四边形 $OMAN$ 为平行四边形 (O 为坐标原点)，求直线 l 的方程。

21. (12 分)

第 40 届中国洛阳牡丹文化节以“花开洛阳、青春登场”为主题，紧扣“颠覆性创意、沉浸式体验、年轻化消费、移动端传播”，组织开展众多文旅项目，取得了喜人的成绩，使洛阳成为最热门的全国“网红打卡城市”之一。其中“穿汉服免费游园”项目火爆“出圈”，倍受广大游客喜爱，带火了以“梦里隋唐尽在洛邑”为主的汉服体验活动。为了解汉服体验店广告支出和销售额之间的关系，在洛阳洛邑古城附近抽取 7 家汉服体验店，得到了广告支出与销售额数据如下：

体验店	A	B	C	D	E	F	G
广告支出/万元	3	4	6	8	11	15	16
销售额/万元	6	10	15	17	23	38	45

对进入 G 体验店的 400 名游客进行统计得知，其中女性游客有 280 人，女性游客中体验汉服的有 180 人，男性游客中没有体验汉服的有 80 人。

(1) 请将下列 2×2 列联表补充完整，依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，能否认为体验汉服与性别有关联：

性别	是否体验汉服		合计
	体验汉服	没有体验汉服	
女	180		280
男		80	
合计			400

(2) 设广告支出为变量 x (万元)，销售额为变量 y (万元)，根据统计数据计算相关系数 r ，并据此说明可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系 (若 $|r| > 0.75$ ，则线性相关程度很强，可用线性回归模型拟合)；

(3) 建立 y 关于 x 的经验回归方程，并预测广告支出为 18 万元时的销售额 (精确到 0.1)。

附：参考数据及公式： $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 727$ ， $\sum_{i=1}^7 y_i^2 = 4648$ ， $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 1827$ ， $\sqrt{14} \approx 3.74$ ， $\sqrt{10} \approx 3.17$ ， $\sqrt{7} \approx 2.64$ ，

$$\text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}},$$

$$\text{在线性回归方程中 } \hat{y} = \hat{b}x + \hat{a} \text{ 中, } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a+b+c+d.$$

α	0.05	0.01	0.001
χ_α	3.841	6.635	10.828

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + \ln x$ (a 为常数).

(1) 若函数 $f(x)$ 是增函数, 求 a 的取值范围;

(2) 设函数 $f(x)$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 求 $f(x_1) - f(x_2)$ 的范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线