绝密★考试结束前

合肥一六八中学2023届高三最后一卷

数学试题

合肥一六八中学命题中心

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|(x+1)(x-5)\geqslant 0\}$，$B=\{x|y=\log_2\sqrt{4-x}\}$，则 $B\cap \complement_{\mathbf{R}}A=$

A. $\{x|-1<x<4\}$　B. $\{x|x<4\}$　C. $\{x|-1\leqslant x<4\}$　D. $\{x|x\leqslant -1\}$

2. 设 i 是虚数单位，复数 $\frac{z}{1-\mathrm{i}}=\frac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则复数 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

3. “$m<2$”是“方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示椭圆”的

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

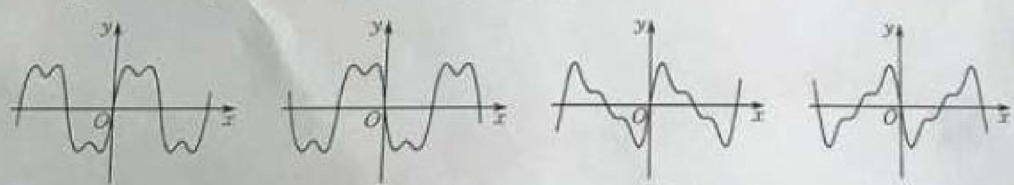
4. 米斗是称量粮食的量器，是古代官仓、粮栈、米行及地主家里必备的用具. 如图为一倒正四棱台型米斗，高为 40 cm. 已知该正四棱台的所有顶点都在一个半径为 50 cm 的球 O 的球面上，且一个底面的中心与球 O 的球心重合，则该正四棱台的侧棱与底面所成角的正弦值为

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2$，$a_2=3$，当 $n\geqslant 2$ 时，a_{n+1} 是 $a_n\cdot a_{n-1}$ 的个位数，则 $a_{2023}=$

A. 4　B. 3　C. 2　D. 1

6. 数学与音乐有着紧密的关联. 声音中也包含正弦函数，声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波，每一个音都是由纯音合成的. 纯音的数学模型是函数 $y=A\sin\omega x$，我们平时听到的音乐一般不是纯音，而是有多种波叠加而成的复合音. 已知刻画某复合音的函数为 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$，则其部分图象大致为



A　B　C　D

7. 在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，点 E，F 分别为 BC 和 CD 的中点，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=4$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=$

A. 1　B. $\frac{3}{2}$　C. 2　D. $\frac{5}{2}$

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\frac{1}{2}f(x)$，且当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=1-|2x-1|$. 当 $x\in[m,+\infty)$ 时，$f(x)\leqslant\frac{3}{32}$，则 m 的最小值为

A. $\frac{27}{8}$　B. $\frac{29}{8}$　C. $\frac{13}{4}$　D. $\frac{15}{4}$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 某学校高三年级学生有500人，其中男生320人，女生180人. 为了获得该校全体高三学生的身高信息，现采用分层抽样的方法抽取样本，并观测样本的指标值（单位：cm），计算得男生样本的均值为174，方差为16，女生样本的均值为164，方差为30. 则下列说法正确的是

A. 如果抽取25人作为样本，则抽取的样本中男生有16人

B. 该校全体高三学生的身高均值为171

C. 抽取的样本的方差为44.08

D. 如果已知男、女的样本量都是25，则总样本的均值和方差可以作为总体均值和方差的估计值

10. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则下列说法正确的有

A. 若 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，则 $|x_1-x_2|_{\min}=\pi$

B. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到的图象关于 y 轴对称

C. 函数 $y=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 2π

D. 若 $f(\omega x)(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有3个零点，则 ω 的取值范围为 $\left[\frac{11}{4},\frac{15}{4}\right)$

11. 正四棱锥 $M\text{-}ABCD$ 中，高为3，底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形，则下列说法正确的有

A. CD 到平面 ABM 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

B. 向量 $\overrightarrow{AM}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C. 棱锥 $M\text{-}ABCD$ 的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

D. 侧面 ABM 所在平面与侧面 CDM 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{4}{5}$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，曲线 $C_0: y=\ln x$ 和 $C_n: y=1-\frac{a_n}{x^n}$ 有交点 $T_n(x_n,y_n)$，且 C_0 和 C_n 在点 T_n 处的切线重合，则下列结论正确的为

A. $\forall n\in\mathbf{N}^*, x_n<\mathrm{e}$

B. $\exists p\in\mathbf{N}^*, a_p<1$

C. $\forall n\in\mathbf{N}^*, y_n\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}<1$

D. $\exists p,q\in\mathbf{N}^*, x_p a_p=x_{p+q}a_{p+q}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 在 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中，含 x 项的系数为________.

14. 近年来，随着我国城镇居民收入的不断增加和人民群众消费观念的改变，假期出游成为时尚. 某校高三年级7名同学计划高考后前往黄山、九华山、庐山三个景点旅游. 已知7名同学中有4名男生，3名女生. 其中2名女生关系要好，必须去同一景点，每个景点至少有两名同学前往，每位同学仅选一处景点游玩，则7名同学游玩行程安排的方法数为________.

15. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2，l_1 与 C 相交于 P,Q，l_2 与 C 相交于 M,N，则 $|PQ|+|MN|$ 的最小值为________.

16. 设 $S_n=\{\mathbf{a}|\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),a_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$，$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n$，定义 $\mathbf{a}$ 的差分运算为 $D(\mathbf{a})=(|a_2-a_1|,|a_3-a_2|,\cdots,|a_n-a_{n-1}|)\in S_{n-1}$. 用 $D^m(\mathbf{a})$ 表示对 $\mathbf{a}$ 进行 $m(m\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n)$ 次差分运算，显然，$D^m(\mathbf{a})$ 是一个 $(n-m)$ 维数组. 称满足 $D^m(\mathbf{a})=(0,0,\cdots,0)$ 的最小正整数 m 的值为 $\mathbf{a}$ 的深度. 若这样的正整数 m 不存在，则称 $\mathbf{a}$ 的深度为 n.

(1)已知 $\mathbf{a}=(0,1,1,1,0,1,1,1)\in S_8$，则 $\mathbf{a}$ 的深度为________；

(2)S_n 中深度为 $d(d\in\mathbf{N}^*,d\leqslant n)$ 的数组个数为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

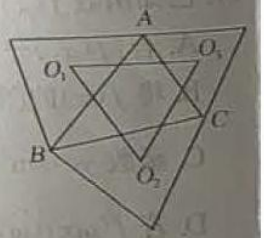
如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法・商功》中，后人称为“三角垛”. “三角垛”的最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，…. 球数构成一个数列 $\{a_n\}$，满足 $a_n=a_{n-1}+n$，$n>1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

18.(本小题满分 12 分)

法国著名军事家拿破仑・波拿巴最早提出的一个几何定理：“以任意三角形的三条边为边向外构造三个等边三角形，则这三个等边三角形的外接圆圆心恰为等边三角形的顶点”. 如图，在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $10\left(\sin\frac{B+C}{2}\right)^2=7-\cos 2A$.



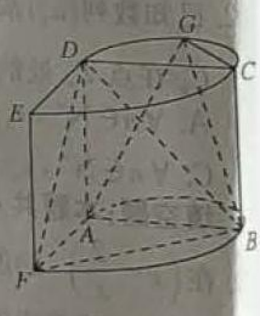
以 AB,BC,AC 为边向外作三个等边三角形，其外接圆圆心依次为 O_1，O_2，O_3.

(1)求角 A；

(2)若 $a=3$，△$O_1O_2O_3$ 的面积为 $\frac{7\sqrt{3}}{4}$，求△ABC 的周长.

19.(本小题满分 12 分)

某同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒. 包装盒如图所示，是由等高的半个圆柱和 $\frac{1}{4}$ 个圆柱拼接而成，其中四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，点 G 是半圆弧 CD 上的动点，且 C,E,D,G 四点共面.



(1)若点 G 为半圆弧 CD 的中点，求证：平面 $BFD\perp$ 平面 BCG；

(2)是否存在 G 点，使得直线 CF 与平面 BCG 所成的角是 $\frac{\pi}{3}$？若存在，确定 G 点位置；若不存在，请说明理由.

20.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，A 为双曲线 C 的右支上一点，点 A 关于原点 O 的对称点为 B，满足 $\angle F_1AF_2=60^\circ$，且 $|BF_2|=2|AF_2|$.

(1)求双曲线 C 的离心率；

(2)若双曲线 C 过点 $(\sqrt{3},2)$，过圆 $O:x^2+y^2=b^2$ 上一点 $T(x_0,y_0)$ 作圆 O 的切线 l，直线 l 交双曲线 C 于 P,Q 两点，且△OPQ 的面积为 $2\sqrt{10}$，求直线 l 的方程.

20.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，A 为双曲线 C 的右支上一点，点 A 关于原点 O 的对称点为 B，满足 $\angle F_1AF_2=60^\circ$，且 $|BF_2|=2|AF_2|$.

(1)求双曲线 C 的离心率；

(2)若双曲线 C 过点 $(\sqrt{3},2)$，过圆 $O:x^2+y^2=b^2$ 上一点 $T(x_0,y_0)$ 作圆 O 的切线 l，直线 l 交双曲线 C 于 P,Q 两点，且 $\triangle OPQ$ 的面积为 $2\sqrt{10}$，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(px-m)-p\ln x$，其中 $p,m>0$.

(1)若 $x=4$ 时，$f(x)$ 有极值 $-\ln 2$，求 p,m 的值；

(2)设 $m\leqslant p-1$，讨论 $f(x)$ 的零点个数.

22.（本小题满分 12 分）

在一个典型的数字通信系统中，由信源发出携带着一定信息量的消息，转换成适合在信道中传输的信号，通过信道传送到接收端. 有干扰无记忆信道是实际应用中常见的信道，信道中存在干扰，从而造成传输的信息失真. 在有干扰无记忆信道中，信道输入和输出是两个取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的随机变量，分别记作 X 和 Y. 条件概率 $P(Y=x_j|X=x_i)$，$i,j=1,2,\cdots,n$，描述了输入信号和输出信号之间统计依赖关系，反映了信道的统计特性. 随机变量 X 的平均信息量定义为：$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p(X=x_i)\log_2 p(X=x_i)$.

当 $n=2$ 时，信道疑义度定义为 $H(Y|X)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(X=x_i,Y=x_j)\log_2 p(Y=x_j|X=x_i)$

$=-[p(X=x_1,Y=x_1)\log_2 p(Y=x_1|X=x_1)+p(X=x_1,Y=x_2)\log_2 p(Y=x_2|X=x_1)+p(X=x_2,Y=x_1)\log_2 p(Y=x_1|X=x_2)+p(X=x_2,Y=x_2)\log_2 p(Y=x_2|X=x_2)]$.

(1)设有一非均匀的骰子，若其任一面出现的概率与该面上的点数成正比，试求扔一次骰子向上的面出现的点数 X 的平均信息量($\log_2 3\approx 1.59$，$\log_2 5\approx 2.32$，$\log_2 7\approx 2.81$)；

(2)设某信道的输入变量 X 与输出变量 Y 均取值 0，1. 满足：

$P(X=0)=\omega$，$p(Y=1|X=0)=p(Y=0|X=1)=p(0<\omega<1,0<p<1)$.

试回答以下问题：

①求 $P(Y=0)$ 的值；

②求该信道的信道疑义度 $H(Y|X)$ 的最大值.

关于我们