二模文数参考答案

一．选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	D	D	D	C	D	A	D	B	A

二．填空题

13. 700　　14. $(-\infty,c]\cup[a,+\infty)$　　15. $y^2=4x$　　16. $\frac{\pi}{3}$； $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

三．解答题

17. （本小题满分 12 分）

（Ⅰ）设数列$\{\sqrt{a_n}\}$的公差为d，

$a_2a_3=a_8,(1+d)(1+2d)=1+7d$ 解得$d=2$，　　……3 分

$\sqrt{a_n}=1+2(n-1)$，所以$a_n=(2n-1)^2$；　　……6 分

（Ⅱ）$b_n=\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}]$　　……9 分

$S_n=\frac{1}{8}[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}]=\frac{n^2+n}{2(2n+1)^2}$　　……12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）平面$ABCD\perp$平面PAD，平面$ABCD\cap$平面$PAD=AD$，$AB\subset$平面$ABCD$，$AB\perp AD$，

$\therefore AB\perp$平面APD，又$PD\subset$平面APD，$\therefore AB\perp PD$，　　……3 分

$PD\perp AP,AP\cap AB=A$，$\therefore PD\perp$平面ABP，又$PB\subset$平面ABP，

$\therefore PD\perp PB$　　……6 分

（Ⅱ）过P作$PH\perp AD$,垂足为H

平面$ABCD\perp$平面PAD，平面$ABCD\cap$平面$PAD=AD$，$PH\subset$平面APD，

$\therefore PH\perp$平面$ABCD$，　　……9 分

$AP=PD$且$PH\perp AD$于H，故H为AD的中点，等腰$Rt\Delta PAD$中，$PA=AD,AD=2$，故$PH=1$，

$AD//BC$，$AB\perp AD,AB=1$，所以$S_{\Delta DBC}=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$

三棱锥$P-BCD$的体积：$V_{P-BCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta DBC}\cdot PH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{6}$.　　……12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）抽取比例 $k=\frac{10}{4\cdot 10}=\frac{1}{4}$ ……3 分

亚洲需要抽取共 $12\times\frac{1}{4}=3$ 人；

美洲需要抽取共 $8\times\frac{1}{4}=2$ 人；

欧洲需要抽取共 $20\times\frac{1}{4}=5$ 人；……6 分

（Ⅱ）从这五支球队中选择两支球队：{加，瑞士}，{加，英}，{加，瑞典}，{加，中}，
{瑞士，英}，{瑞士，瑞典}，{瑞士，中}，
{英，瑞典}，{英，中}，
{瑞典，中}共 10 个不同的选法，……8 分

其中中国队被选中：{加，中}，{瑞士，中}，{英，中}，{瑞典，中}共 4 种不同的选法，……10 分

若比赛的揭幕战随机的从这五支球队中选择两支球队出战，则中国队被选中的概率 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.……12 分

20. （本小题满分 12 分）

（I）$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$ ……2 分

$f'(x)>0\Rightarrow x<1, f'(x)<0\Rightarrow x>1$，

$f(x)$ 的单调递增区间 $(-\infty,1)$，单调递减区间 $(1,+\infty)$； ……4 分

（II）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像交于 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ $(x_2>x_1)$ 两点，

即 $x>0, f(x)=g(x)$ 有两个不同的解，不妨设为 $0<x_1<x_2$，设：

$F(x)=f(x)-g(x)\ \therefore F(x)=\frac{x}{e^x}-(x-1)^2-a, F'(x)=\frac{x-1}{e^x}-2(x-1)=-(x-1)(\frac{1}{e}+2)$

$F'(x)>0\Rightarrow 0<x<1; F'(x)<0\Rightarrow x>1$, 所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减 ……6 分

若 $x>0, f(x)=g(x)$ 又两个不同的解，则函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点，

故 $x>0$ 时，$F(x)_{\max}=F(1)=\frac{1}{e}-a<0$，所以 $a<\frac{1}{e}$ ①； ……8 分

且 $F(0)>0\Rightarrow -1-a>0\Rightarrow a>-1$ ②； ……10 分

由①②得 $-1<a<\frac{1}{e}$， 所以 $F(3)=\frac{3}{e^3}-4-a<0$，故存在 $x_1\in(0,1), x\in(1,3), F(x_1)=0, F(x_2)=0$

即方程 $f(x)=g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 有两个不同的解，即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像交于不同两点

综上 $-1<a<\frac{1}{e}$ ……12 分

21. （本小题满分 12 分）

(Ⅰ)（ⅰ）当直线 l 的斜率不存在时，A，B 两点关于 x 轴对称，所以 $x_2=x_1$，$y_2=-y_1$.

因为 $A(x_1, y_1)$ 在椭圆上，所以有 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，又因为 $S_{\triangle AOB}=1$，所以 $|x_1||y_1|=1$

解得 $|x_1|=\sqrt{2}$，$|y_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}$，此时 $x_1^2+x_2^2=4$，$y_1^2+y_2^2=1$，$\frac{x_1^2+x_2^2}{y_1^2+y_2^2}=4$ ……2 分

（ⅱ）当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，由题意 $m\neq 0$.

将 $y=kx+m$ 代入方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，整理得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=16(4k^2-m^2+1)>0$ ①

$x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$， ……4 分

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\frac{4\sqrt{4k^2-m^2+1}}{4k^2+1}$

因为点 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|d=1$ 得 $4k^2+1-2m^2=0$ 且符合①式.

此时 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{64k^2m^2}{(4k^2+1)^2}-\frac{8(m^2-1)}{4k^2+1}==4$

$y_1^2+y_2^2=1-\frac{x_1^2}{4}+1-\frac{x_2^2}{4}=1$，所以 $\frac{x_1^2+x_2^2}{y_1^2+y_2^2}=4$，综上所述，$\frac{x_1^2+x_2^2}{y_1^2+y_2^2}=4$（定值） ……8 分

(Ⅱ) 因为 $4|OM|^2+|AB|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$$=2[(x_1^2+x_2^2)+(y_1^2+y_2^2)]=10$$

所以 $2|OM|\cdot|AB|\leqslant\frac{4|OM|^2+|AB|^2}{2}=5$，即 $|OM|\cdot|AB|\leqslant\frac{5}{2}$ 当且仅当 $2|OM|=|AB|=\sqrt{5}$ 时等号

成立，所以 $|OM|\cdot|AB|$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$. ……………………………………………………12 分

22. （本小题满分 10 分）

（I）由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$得直线$y=2$的极坐标方程为$\rho\sin\theta=2$； ……………………2 分

将曲线 C 的此时方程$\begin{cases}x=2\cos\varphi\\y=\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$为参数) 化为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$得曲线 C 的极坐标方程为$\rho^2(1+\sin^2\theta)=4$ ……………………5 分

（II）点$A(\rho_1,\alpha)$在曲线 C 上，所以$\rho_1^{\,2}(1+\sin^2\alpha)=4$，所以$\dfrac{1}{\rho_1^{\,2}}=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{4}$，即$\dfrac{1}{|OA|^2}=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{4}$

……………………………………………6 分

点$B(\rho_2,\alpha+\dfrac{\pi}{4})$在直线$l$上，所以$\rho_2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=2$，所以$\dfrac{1}{\rho_2}=\dfrac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{2}$即$\dfrac{1}{|OB|}=\dfrac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{2}$

所以$\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{4})}{4}=\dfrac{1-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{2})}{8}=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{8}$ ……………………………………………7 分

所以$\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{4}+\dfrac{1+\sin 2\alpha}{8}=\dfrac{1+\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{4}+\dfrac{1+\sin 2\alpha}{8}$

$=\dfrac{3-\cos 2\alpha}{8}+\dfrac{1+\sin 2\alpha}{8}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})$

……………………………………………9 分

当$2\alpha-\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=k\pi+\dfrac{3\pi}{8}(k\in Z)$时，$\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})$取到最大值1

$\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$取到最大值$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ ……………………………………………10 分

23. （本小题满分 10 分）

（Ⅰ）$a+b+c=6$，且$c=5$，所以$a+b=1$；

$(\dfrac{1}{a^2}-1)\cdot(\dfrac{1}{b^2}-1)=\dfrac{1-a^2}{a^2}\cdot\dfrac{1-b^2}{b^2}=\dfrac{(1-a)(1+a)(1-b)(1+b)}{a^2b^2}=\dfrac{(1+a)(1+b)}{ab}=1+\dfrac{2}{ab}$ …………2 分

$1=a+b\geq 2\sqrt{ab}$(当且仅当$a=b$时取到等号)$\Rightarrow ab\leq\dfrac{1}{4}$ …………4 分

所以$(\dfrac{1}{a^2}-1)\cdot(\dfrac{1}{b^2}-1)\geq 9$当且仅当$\begin{cases}a=b\\a+b=1\end{cases}$即$a=b=\dfrac{1}{2}$时取到等号

当 $a=b=\dfrac{1}{2}$时$(\dfrac{1}{a^2}-1)\cdot(\dfrac{1}{b^2}-1)$取到最小值为9 ……………………5 分（未指出取等条件扣 1 分）

（Ⅱ）$a^2+b^2-2b+c^2-4c=a^2+(b-1)^2+(c-2)^2-5$ ……………………………………………6 分

由柯西公式：

$\left[a^2+(b-1)^2+(c-2)^2\right]\cdot\left(1^2+1^2+1^2\right)\ge(a+b-1+c-2)^2$（当且仅当$a=b-1=c-2$时取到等号），

得$a^2+(b-1)^2+(c-2)^2\ge\dfrac{(a+b+c-3)^2}{3}$ ……………………………………………9 分

又因为$a+b+c=6$，所以$a^2+(b-1)^2+(c-2)^2\ge 3$，

即$a^2+b^2-2b+c^2-4c\ge -2$（当且仅当$\begin{cases}a=b-1=c-2\\ a+b+c=6\end{cases}$即$\begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=3\end{cases}$时取到等号）

……………………………………………10 分**（不写取等条件可不扣分）**