

绝密★启用前

佩佩教育·2023年普通高校招生统一考试
湖南四大名校名师团队模拟冲刺卷(1)



数 学

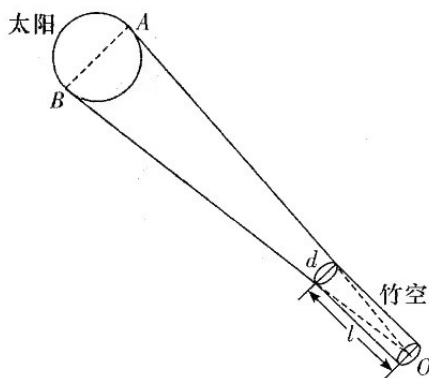
注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | a - 2 < x < a + 3\}$, $B = \{x | (x - 1)(x - 4) > 0\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, 3)$ C. $[1, 3]$ D. $[3, +\infty)$
2. 设 i 是虚数单位, 已知复数 z 满足 $(1 - i)z = 1 + (a - 1)i$, ($a \in \mathbf{R}$), 且复数 z 是纯虚数, 则实数 $a =$
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
3. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + ax^2 + 1$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线与直线 $x + 3y - 1 = 0$ 垂直, 则实数 a 的值为
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 《周髀算经》中“侧影探日行”一文有记载:“即取竹空, 径一寸, 长八尺, 捕影而视之, 空正掩目, 而日应空之孔。”意谓:“取竹空这一望筒, 当望筒直径 d 是一寸, 筒长 l 是八尺时(注:一尺等于十寸), 从筒中搜捕太阳的边缘观察, 则筒的内孔正好覆盖太阳, 而太阳的外缘恰好填满竹管的内孔。”如图所示, O 为竹空底面圆心, 则太阳角 $\angle AOB$ 的正切值为

数学试题 第1页(共5页)



- A. $\frac{1}{160}$ B. $\frac{1}{80}$ C. $\frac{160}{80^2-1}$ D. $\frac{320}{160^2-1}$
5. 将函数 $f(x)=2\cos(x-\varphi)$ 图象上各点的横坐标变为原来的 $\omega (\omega>0)$ 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对于满足 $|g(x_1)-g(x_2)|=4$ 的 x_1, x_2 , 都有 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{4}$, 则 ω 的值为
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4
6. 已知抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 的焦点为 F , 点 $M(x_0, \sqrt{10}) (x_0>\frac{p}{2})$ 是抛物线 C 上一点, 圆 M 与线段 MF 相交于点 A , 且被直线 $x=\frac{p}{2}$ 截得的弦长为 $\sqrt{3}|MA|$, 若 $|MA|=2|AF|$, 则 $|AF|$ =
- A. 2 B. 1 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}$
7. 已知三棱锥 $P-ABC$, Q 为 BC 中点, $PB=PC=AB=BC=AC=2$, 侧面 $PBC \perp$ 底面 ABC , 则过点 Q 的平面截该三棱锥外接球所得截面面积的取值范围为
- A. $[\pi, \frac{5\pi}{3}]$ B. $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$
C. $[\frac{2\pi}{3}, 2\pi]$ D. $[\pi, 2\pi]$
8. 设 $a=\frac{5(2-\ln 5)}{e^2}, b=\frac{1}{e}, c=\frac{\ln 4}{4}$, 则 a, b, c 的大小顺序为
- A. $a<c<b$ B. $c<a<b$ C. $a<b<c$ D. $b<a<c$

数学试题 第 2 页(共 5 页)

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 已知某批零件的质量指标 ξ (单位:毫米)服从正态分布 $N(25.40, \sigma^2)$, 且 $P(\xi \geq 25.45) = 0.1$, 现从该批零件中随机取3件, 用 X 表示这3件产品的质量指标值 ξ 不位于区间 $(25.35, 25.45)$ 的产品件数, 则

- A. $P(25.35 < \xi < 25.45) = 0.8$ B. $E(X) = 2.4$
C. $D(X) = 0.48$ D. $P(X \geq 1) = 0.488$

10. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长均为 $2\sqrt{2}$, E, F 分别是 PC, AB 的中点, M 为棱 PB 上异于 P, B 的一动点, 则以下结论正确的是

- A. 异面直线 EF, PD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$
B. 直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$
C. $\triangle EMF$ 周长的最小值为 $\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$
D. 存在点 M 使得 $PB \perp$ 平面 MEF

11. 已知正数 α, β 满足 $e^\alpha - e^\beta > \frac{1}{2\alpha + \sin \alpha} - \frac{1}{2\beta + \sin \beta}$, 则下列不等式正确的是

- A. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{4}{\alpha + \beta}$ B. $2^{\alpha - \beta + 1} > 2$
C. $\ln \alpha + \alpha < \ln \beta + \beta$ D. $\frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{e^\beta} + \frac{1}{\beta}$

12. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, C 的一条渐近线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}x$, 且 F_1 到 l 的距离为 $3\sqrt{3}$, 点 P 为 C 在第一象限上的点, 点 Q 的坐标为 $(2, 0)$, PQ 为 $\angle F_1PF_2$ 的平分线. 则下列正确的是

- A. 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ B. $|PF_1| = 3|PF_2|$
C. $|OP| = 3\sqrt{6}$ D. 点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{3\sqrt{15}}{2}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知向量 $a = (1, \sqrt{3}), b = (3, \sqrt{3})$, 则 b 在 a 方向上的投影向量是_____.

14. 已知甲罐中有3个红球、2个黑球, 乙罐中有2个红球、2个黑球, 先从甲罐中随

机取出一球放入乙罐,再从乙罐中随机取出一球. A 表示事件“由甲罐取出的球是黑球”, B 表示事件“由乙罐取出的球是黑球”,则 $P(B|A)=$ _____.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, $C: (x+1)^2 + y^2 = 9$, 直线 l 与圆 O 相切,与圆 C 相交于 A, B 两点,分别以点 A, B 为切点作圆 C 的切线 l_1, l_2 . 设直线 l_1, l_2 的交点为 $P(m, n)$, 则 m 的最大值为_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, $a_{n+1}^2 - a_{n+1} = a_n (n \in \mathbf{N}^*)$. 若数列 $\{a_n\}$ 各项单调递增, 则首项 a_1 的取值范围是_____; 当 $a_1 = \frac{2}{3}$ 时, 记 $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n - 1}$, 若 $k < b_1 + b_2 + \dots + b_{21} < k + \frac{1}{2}$, 则整数 $k =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = \frac{1}{2}$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_n^2 = a_n S_n - a_n$.

(1) 求 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{2^n}{S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且

$$2S \left(\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin A}{\sin C} \right) = (a^2 + b^2) \sin A.$$

(1) 求 C 的值;

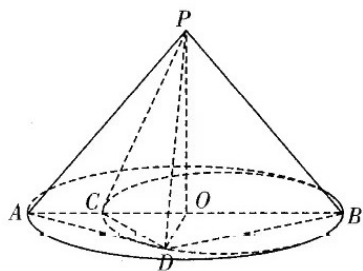
(2) 若 $a = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

如图所示, 圆锥的轴截面 PAB 是等腰直角三角形, 且 $OA = 4$, 点 C 在线段 AB 上, 且 $BC = 3CA$, 点 D 是以 BC 为直径的圆上一动点.

(1) 当 $CD = CO$ 时, 证明: 平面 $PAD \perp$ 平面 POD

(2) 当三棱锥 $P-BCD$ 的体积最大时, 求二面角 $B-PD-A$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

党的二十大胜利召开,某单位组织举办“百年党史”知识对抗赛,组委会将参赛人员随机分为若干组,每组均为两名选手,每组对抗赛开始时,组委会随机从百年党史题库抽取 2 道抢答试题,每位选手抢到每道试题的机会相等. 比赛细则为:选手抢到试题且回答正确得 100 分,对方选手得 0 分;选手抢到试题但回答错误或没有回答得 0 分,对方选手得 50 分;2 道题目抢答完毕后得分多者获胜. 已知甲、乙两名选手被分在同一组进行对抗赛,每道试题甲回答正确的概率为 $\frac{4}{5}$,乙回答正确的概率为 $\frac{3}{5}$,两名选手每道试题回答是否正确相互独立.

- (1)求乙同学得 100 分的概率;
- (2)记 X 为甲同学的累计得分,求 X 的分布列和数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1, (a > 1)$ 的上、下顶点是 B_1, B_2 ,左、右顶点是 A_1, A_2 ,点 D 在椭圆 Γ 内,点 M 在椭圆 Γ 上,在四边形 MB_1DB_2 中,若 $MB_1 \perp B_1D, MB_2 \perp B_2D$,且四边形 MB_1DB_2 面积的最大值为 $\frac{5}{2}$.

- (1)求 a 的值.
- (2)已知直线 $x = my + 1$ 交椭圆 Γ 于 P, Q 两点,直线 A_1P 与 A_2Q 交于点 S ,证明:当 m 变化时,存在不同于 A_2 的定点 T ,使得 $|A_2S| = |ST|$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + 2ax - 1$,其中 a 为实数, e 为自然对数底数, $e = 2.71828\cdots$.

- (1)已知函数 $x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$,求实数 a 取值的集合;
- (2)已知函数 $F(x) = f(x) - ax^2$ 有两个不同极值点 x_1, x_2 .
 - ①求实数 a 的取值范围;
 - ②证明: $2\sqrt{a}(x_1 + x_2) > 3x_1x_2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线