

2022-2023 学年高三下学期 3 月四校联考试卷

数学学科

命题学校：淄博一中 命题人：徐转贵 审题人：甘建荣

本试卷分四大题，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x \leq 2\}$, $B = \{x | 0 < x \leq a\}$, 若 $A \cup B = \{x | -1 < x \leq 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | -2 < x < 0\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ C. $\{x | 1 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

2. 如果一个复数的实部和虚部相等，则称这个复数为“等部复数”，若复数 $z = (2 + ai)i$ (其中 $a \in \mathbb{R}$) 为“等部复数”，则复数 $\bar{z} - 2ai$ 在复平面内对应的点在

- A. 第四象限 B. 第三象限 C. 第二象限 D. 第一象限

3. 已知函数 $f(x) = 3\sin(2x + \varphi)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，则 $|\varphi|$ 的最小值是

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 设 $a = 4^{0.4}$, $b = 0.4^4$, $c = \log_{0.2} 0.03$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

5. 已知向量 a, b 满足 $|a + b| = |a - b|$, 则 $a + b$ 在 a 方向上的投影向量为

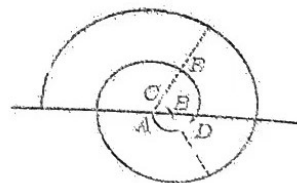
- A. a B. b C. $2a$ D. $2b$

6. 蚊香具有悠久的历史，我国蚊香的发明与古人端午节的习俗有关。如图，为某校数学社团用数学软件制作的“蚊香”画法如下：在水平直线上取长度为 1 的线段 AB ，作一个等边三角形 ABC ，然后以点 B 为圆心， AB 为半径逆时针画圆弧交线段 CB 的延长线于点 D (第一段圆弧)，再以点 C 为圆心， CD 为半径逆时针画圆弧交线段 AC 的延长线于点 E ，再以点 A 为圆心， AE 为半径逆时针画圆弧……以此类推，当得到的“蚊香”恰好有 9 段圆弧时，“蚊香”的长度为

- A. 14π B. 18π C. 24π D. 30π



蚊香



7. 过抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 的直线交抛物线 C 于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点，设 $|FA| = m$, $|FB| = n$, 若 $n, x_1 - x_2, m + n$ 成等比数列，则 $\frac{m}{n} =$

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. 3 或 $\frac{1}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

试卷第 1 页，共 4 页

8. 已知三棱锥 $P-ABC$, Q 为 BC 中点, $PB=PC=AB=BC=AC=2$, 侧面 $PBC \perp$ 底面 ABC , 则过点 Q 的平面截该三棱锥外接球所得截面面积的取值范围为

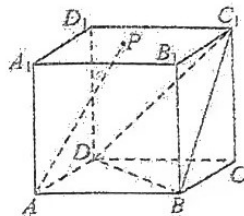
- A. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ B. $\left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right]$ C. $\left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$ D. $[\pi, 2\pi]$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是

- A. 已知随机变量 X, Y , 满足 $X+2Y=4$, 且 X 服从正态分布 $N(3,1)$, 则 $E(Y)=\frac{1}{2}$
 B. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$, 则 $P(X=3)=\frac{80}{243}$
 C. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(4,1)$, 且 $P(X \geq 5)=0.1587$, 则 $P(3 < X < 5)=0.6826$
 D. 已知一组数据 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的方差是 3, 则数据 $4x_1-1, 4x_2-1, 4x_3-1, 4x_4-1, 4x_5-1, 4x_6-1$ 的标准差是 12

10. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ (含边界) 内一动点, 且 $AP \parallel$ 平面 DBC_1 , 则下列选项正确的是



- A. $A_1C \perp AP$ B. 三棱锥 $P-BDC_1$ 的体积为定值
 C. $PC \perp$ 平面 BDC_1 D. 异面直线 AP 与 BD 所成角的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

11. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 点 P 为直线 $l: x - 2y - 4 = 0$ 上一动点, 下列结论正确的是

- A. 直线 l 与圆 C 相离 B. 圆 C 上有且仅有一个点到直线 l 的距离等于 1
 C. 过点 P 向圆 C 引一条切线 PA , A 为切点, 则 $|PA|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{55}}{5}$
 D. 过点 P 向圆 C 引两条切线 PA 和 PB , A, B 为切点, 则直线 AB 过定点

12. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = a + \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$, 若函数 $y = f(x+1)$ 是偶函数, 则下列结论正确的有

- A. $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称 B. $f(2022)=0$
 C. $f(2023) > f(2021)$ D. $y = f(x) - \log_{100}|x|$ 有 100 个零点

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 2022 年 4 月 24 日是第七个“中国航天日”, 今年的主题是“航天点亮梦想”. 某校组织学生参与航天知识竞答活动, 某班 8 位同学成绩如下: 7, 6, 8, 9, 8, 7, 10, m . 若去掉 m , 该组数据的第 25 百分位数保持不变, 则整数 m ($1 \leq m \leq 10$) 的值可以是_____ (写出一个满足条件的 m 值即可).



14. 已知 α 为锐角, $1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\sin \alpha}$, 则 $\alpha =$ _____.

15. 设 $P(x, y)$ 是曲线 $C: \sqrt{\frac{x^2}{25}} + \sqrt{\frac{y^2}{16}} = 1$ 上的点, $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, 则 $|PF_1| + |PF_2|$ 的最大值等于 _____.

16. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 是函数 $f(x)$ 的图象上不重合的三点, 若函数 $f(x)$ 满足: 当 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 时, 总有 P_1, P_2, P_3 三点共线, 则称函数 $f(x)$ 是“零和共线函数”. 若 $y = x^3 + ax$ 是“零和共线函数”, 则 a 的范围是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

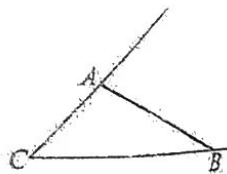
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_{n+1} = 2\sqrt{S_n} + 1, (n \in \mathbb{N}^*)$, $a_2 = 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{4S_n - 1}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

某商场计划在一个两面靠墙的角落规划一个三角形促销活动区域 (即 $\triangle ABC$ 区域), 地面形状如图所示. 已知已有两面墙的夹角 $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$, $\angle CBA$ 为锐角, 假设墙 CA, CB 的可利用长度 (单位: 米) 足够长.



(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 BC 边上的高等于 $\frac{1}{4}BC$, 求 $\sin \angle CAB$;

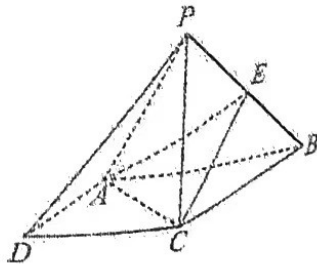
(2) 当 AB 的长度为 6 米时, 求该活动区域面积的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp$ 底面 $ABCD$, $ABCD$ 是直角梯形, $AD \perp DC$, $AB \parallel DC$, $AB = 2AD = 2CD = 2$, 点 E 是 PB 的中点.

(1) 证明: 平面 $EAC \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求二面角 $P-AC-E$ 的余弦值.





20. (本小题满分 12 分)

芯片是全球现代文明科学的集中代表,是全球现代科技文明皇冠上那最亮的一颗星,是大国之间的科技实力的竞争与合作焦点与利器.国内某企业启动一种主控芯片的试产,试产期同步进行产品检测,检测包括智能检测与人工抽检.智能检测在生产线上自动完成,包含安全检测、电池检测、性能检测等三项指标,人工抽检仅对智能检测三项指标均达标的产品进行抽样检测,且仅设置一个综合指标,四项指标均达标的产品才能视为合格品.已知试产期的产品,智能检测三项指标的达标率约为 $\frac{99}{100}$, $\frac{98}{99}$, $\frac{97}{98}$, 人工抽检的综合指标不达标率为 p ($0 < p < 1$).

(1)求每个芯片智能检测不达标的概率;

(2)人工抽检 30 个芯片,记恰有 1 个不达标的概率为 $\varphi(p)$,求 $\varphi(p)$ 的极大值点 p_0 ;

(3)若芯片的合格率不超过 96%,则需对生产工序进行改良.以 (2) 中确定的 p_0 作为 p 的值,判断该企业是否需对生产工序进行改良.

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > 0$, $b > 0$) 的虚轴长为 2, 右焦点为 F , 点 M, N 分别为双曲线 C 的左、右顶点, 过点 F 的直线 l 交双曲线的右支于 P, Q 两点, 设直线 MP, NP 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 k_2 = \frac{1}{3}$.

(1)求双曲线 C 的方程;

(2)当点 P 在第一象限, 且 $\frac{\tan \angle MPN}{\tan \angle MCN} = \frac{1}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x + a(1-x)$.

(1)若 $f(x) \leq a$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2)过原点分别作曲线 $y = f(x)$ 和 $y = e^x$ 的切线 l_1 和 l_2 , 试问: 是否存在 $a > 0$, 使得切线 l_1 和 l_2 的斜率互为倒数? 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线