按秘密级事项管理

丹东市2023届高三总复习质量测试（一）

数学试题评分参考

一、选择题

1．D　　2．C　　3．B　　4．A

5．A　　6．B　　7．B　　8．D

二、选择题

9．AC　　10．BC　　11．BCD　　12．AD

三、填空题

13．0.38　　14．星期五

15．$\dfrac{x^5}{120}$，0.84　　16．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

四、解答题

17．解：

（1）因为$\sin^2A>\sin^2B+\sin^2C$，由正弦定理可知$a^2>b^2+c^2$.

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0$，所以 $A>90^\circ$．于是$\triangle ABC$是钝角三角形.

…………（5分）

（2）由（1）知，若①成立，则 $B=45^\circ$；若②成立，则 $C=60^\circ$．因为 $45^\circ+60>90^\circ$，所以①与②不能同时成立．③④将同时成立，由正弦定理可得$\sqrt{2}\sin B=2\sin C$.

若①③④同时成立，则 $\sin C=\dfrac{1}{2}$，由（1）可知 $C=30^\circ$．从而 $A=105^\circ$，$\triangle ABC$ 存在.

若②③④同时成立，则 $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}>1$，$\triangle ABC$ 不存在.

综上，条件①③④同时成立能使$\triangle ABC$存在.

…………（10分）

18．解：

（1）从参与评价的网民中每次抽取1人，抽取到“好评”的概率为$\dfrac{9000+1000}{20000}=\dfrac{1}{2}$.

记A表示事件：“抽取了5次”，则

$$P(A)=(\frac{1}{2})^4\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^4\times(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{16}.$$

…………（6分）

（2）在给予“中评”评价的人中，年龄在50岁以下及50岁以上人数之比为3:2．因此抽取的10人中，50岁以下与50岁以上的人数分别为6人，4人.

依题意X服从参数为10，3，6的超几何分布，所以

$$P(X=k)=\frac{C_6^kC_4^{3-k}}{C_{10}^3}，k=0，1，2，3.$$

于是X的分布列为

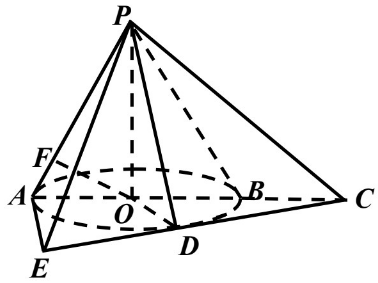
X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

X的数学期望

$$E(X)=3\times\frac{6}{10}=1.8.$$

…………（12分）

19．解法 1：



（1）连结 PO，PD，OD，因为 CE 与圆 O 的切于点 D，所以 $OD\perp EC$.

因为 $PO\perp$平面 AEC，由三垂线定理可知 $PD\perp EC$，所以 $\angle PDO$ 是 $P-EC-A$ 的平面角．因此 $\angle PDO=60^\circ$．

因为 $OD=1$，所以 $PO=\sqrt{3}$，故 $PB=2$．于是该圆锥的侧面积 $S_{侧}=\pi\cdot1\cdot2=2\pi$.

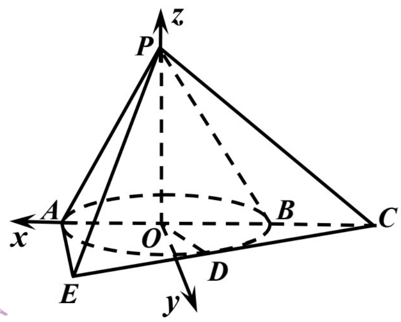
…………（6 分）

（2）过 O 在平面 PAC 内作 $OF\perp PA$，垂足为 F．因为平面 $PAE\perp$平面 PAC，交线为 PA，所以 $OF\perp$平面 PAE．可得 $OF\perp AE$．又 $PO\perp AE$，所以 $AE\perp$平面 PAC．从而 $AE\perp AC$.

由题设及（1）得 $\angle OCD=30^\circ$，$AC=3$，可知 $AE=\sqrt{3}$，$\triangle AEC$ 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$．因此三棱锥 $P-AEC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$.

…………（12 分）

解法 2：



连结 PO，则 $PO\perp$平面 AEC，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$ 为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，y 轴在平面 AEC 内.

因为 CE 与圆 O 切于点 D，所以 $OD\perp DC$，因为连结 OD，因为 $OD=1$，$OC=2$，所以 $\angle DOC=60^\circ$．因此 $C(-2，0，0)$，$D(-\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}，0)$，$\overrightarrow{CD}=(\frac{3}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}，0)$.

设 $P(0，0，h)\ (h>0)$，则 $\overrightarrow{CP}=(2，0，h)$.

设平面 PEC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1，y_1，z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1=0,\\ 2x_1+hz_1=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(-1，\sqrt{3}，\frac{2}{h})$.

平面 AEC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0，0，1)$，由 $\cos 60^\circ=|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}|=\frac{\frac{2}{h}}{\sqrt{4+\frac{4}{h^2}}}$，可得 $h=\sqrt{3}$.

（1）可知 $PO=\sqrt{3}$，因为 $OD=1$，所以 $PB=2$．于是该圆锥的侧面积 $S_{侧}=\pi\cdot1\cdot2=2\pi$.

…………（6 分）

（2）因为 $A(1，0，0)$，$P(0，0，\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AP}=(-1，0，\sqrt{3})$．设 $E(x_2，y_2，0)$，则 $\overrightarrow{AE}=(x_2-1，y_2，0)$，$\overrightarrow{CE}=(x_2+2，y_2，0)$．因为 $\overrightarrow{OD}=(-\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}，0)$，取平面 PAC 的一个法向量 $\boldsymbol{p}=(0，1，0)$，则 $\boldsymbol{p}=\lambda\overrightarrow{AP}+\mu\overrightarrow{AE}(\lambda，\mu\in\mathbf{R})$，又 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CE}=0$， 可得 $\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=\sqrt{3}.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AE}=(0，\sqrt{3}，0)$，故 $\overrightarrow{AE}//\boldsymbol{p}$，所以 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AC}$.

由 $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{AC}|=3$ 得 $\triangle AEC$ 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$．于是三棱锥 $P-AEC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$.

…………（12 分

20．解：

（1）由$S_1=3-a_1-1$ 得$a_1=1$.

由$S_n=3-a_n-n^2$，可知$S_{n+1}=3-a_{n+1}-(n+1)^2$.

相减得 $2a_{n+1}=a_n-2n-1$，所以

$$a_{n+1}+2n-1=\frac{1}{2}(a_n+2n-3).$$

又$a_1-1=0$，故$a_n+2n-3=0$，因此$a_n=3-2n$.

…………（4 分）

（2）设数列$\{(n+1)\ 2^n\}$的前项和为T_n，则

$$T_n=2\ 2^1+3\ 2^2+\cdots+(n+1)\ 2^n.$$

两边同乘以 2 得

$$2T_n=2\ 2^2+3\ 2^3+4\ 2^4+\cdots+(n+1)\ 2^{n+1}.$$

以上两式相减得

$$T_n=(n+1)\ 2^{n+1}-4-(2^2+2^3+\cdots+2^n)=n\ 2^{n+1}.$$

…………（6 分）

设a_{k+1}是新数列的第 N 项，则

$$N=1+2+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

当 $k=8$ 时，$N=45<50$，当 $k=9$ 时，$N=55>50$．故这个新数列的前 50 项中包含$\{a_n\}$的前 9 项，以及列$\{(n+1)\ 2^n\}$的前 $k(k=1，2，3，\cdots，8)$项和前 5 项，

由（1）知$S_n=n(2-n)$，所以这个新数列的前 50 项和为

$$\begin{aligned}&S_9+(1\ 2^2+2\ 2^3+\cdots+8\ 2^9)+(2\ 2^1+3\ 2^2+4\ 2^3+5\ 2^4+6\ 2^5)\\&=-63+2^2(1+2\ 2^1+\cdots+8\ 2^7)+5\ 2^6\\&=257+2^2(1+7\ 2^8)\\&=261+7\ 2^{10}\\&=7429.\end{aligned}$$

…………（12 分）

21．解：

（1）因为$F_2(2，0)$，所以$a^2+b^2=4$.

因为当 $PF_2\perp x$ 轴时，$|OP|=\sqrt{13}$，可知 $P(2，\pm3)$.

点 P 到两个焦点$F_1(-2，0)$，$F_2(2，0)$的距离分别为 3 和 5.

由双曲线定义得 $a=\frac{5-3}{2}=1$，所以$b^2=3$.

因此 C 的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

…………（4 分）

（2）由题设直线 PA 的斜率 k 存在，且$|k|>\sqrt{3}$．由 $OQ\parallel PA$，及 Q 在直线 $x=\frac{1}{2}$上，可得 $Q(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}k)$.

设 PA：$y=k(x-1)$，$P(x_1，y_1)$．由$\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$得$(3-k^2)x^2-2k^2x-k^2-3=0$．这个关于 x 的方程两根为x_1，1．因此$x_1=\dfrac{k^2+3}{k^2-3}$，$y_1=k(x_1-1)x_1=\dfrac{6k}{k^2-3}$.

因为 $A(1，0)$，所以 $M(\dfrac{k^2}{k^2-3}，\dfrac{3k}{k^2-3})$.

设 $N(x_2，y_2)$，则$\dfrac{k^2}{k^2-3}y_2=\dfrac{3k}{k^2-3}x_2$，所以$y_2=\dfrac{3}{k}x_2$.

由$\begin{cases} y_2=\dfrac{3}{k}x_2, \\ (x_2-2)\dfrac{1}{2}k=(y_2-0)\,(\dfrac{1}{2}-2) \end{cases}$得$(x_2-1)^2+y_2^2=1$.

…………（8 分）

由$\begin{cases} y_2=\dfrac{3}{k}x_2, \\ (x_2-1)^2+y_2^2=1 \end{cases}$得$x_2=\dfrac{2}{\dfrac{9}{k^2}+1}$，因为$|k|>\sqrt{3}$，所以$\dfrac{1}{2}<x_2<2$.

因此$|NF_1|=\sqrt{(x_2+2)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2-2)^2+1-(x_2-1)^2}=\sqrt{6x_2+4}\in(\sqrt{7}，4)$．即$|NF_1|$的取值范围为$(\sqrt{7}，4)$.

…………（12 分）

22．解：

（1）$f(x)$定义域为$(0，+\infty)$，当 $a=\dfrac{3}{8}$时，$f'(x)=\dfrac{(3x-1)(x-3)}{8x(1+x)^2}$.

当 $0<x<\dfrac{1}{3}$时，$f'(x)>0$；当$\dfrac{1}{3}<x<3$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(0，\dfrac{1}{3})$单调递增，在$(\dfrac{1}{3}，3)$单调递减，在$(3，+\infty)$单调递增.

…………（4 分）

（2）因为$f(1)=0$，则 $x=1$ 是 $f(x)$的一个零点，不妨设$x_1=1$.

$f(x)$定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{ax^2+2(a-1)x+a}{x(1+x)^2}$，$\triangle=4(1-2a)$.

若 $a>\dfrac{1}{2}$，则$\triangle<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)$有且只有一个零点$x_1=1$.

若 $a=\dfrac{1}{2}$，则$\triangle=0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)\geqslant0$，当且仅当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$，$f(x)$单调递增，$f(x)$有且只有一个零点$x_1=1$.

若$\dfrac{1}{3}<a<\dfrac{1}{2}$，则$\triangle>0$，$f'(x)=0$ 有两个正数根$\dfrac{1-a\pm\sqrt{1-2a}}{a}$．令$\dfrac{1-a+\sqrt{1-2a}}{a}=x_0$，则$\dfrac{1-a-\sqrt{1-2a}}{a}=\dfrac{1}{x_0}$，当 $0<x<\dfrac{1}{x_0}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$\dfrac{1}{x_0}<x<x_0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>x_0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

因为$f(1)=0$，所以 $0<\dfrac{1}{x_0}<1<x_0$，且 $f(\dfrac{1}{x_0})>0$，$f(x_0)<0$.

因为 $0<e^{-a^{-1}}<1$，$f(e^{-a^{-1}})=-\dfrac{2e^{-a^{-1}}}{1+e^{-a^{-1}}}<0$，所以存在唯一$x_2\in(e^{-a^{-1}}，\dfrac{1}{x_0})$，使得 $f(x_2)=0$.

因为 $e^{a^{-1}}>1$，$f(e^{a^{-1}})=\dfrac{2}{1+e^{a^{-1}}}>0$，所以存在唯一$x_3\in(x_0，e^{a^{-1}})$，使得 $f(x_3)=0$.

综上，若 $f(x)$有三个不同零点x_1，x_2，x_3，则 a 的取值范围为$(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2})$

…………（8 分）

由$f(\frac{1}{x})=-f(x)$，可得$x_2=\frac{1}{x_3}$，于是$x_1+x_2+x_3=1+\frac{1}{x_3}+x_3>1+2\sqrt{\frac{1}{x_3}x_3}=3$.

设 $g(x)=\ln x-\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$，则当 $x>1$ 时，$g'(x)=\frac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)^2}>0$，$g(x)$单调递增，所以 $g(x)>g(1)=0$，可得当 $x>1$ 时，$\ln x>\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$.

由 $f(x_3)=0$ 可得$\frac{x_3-1}{x_3+1}=a\ln x_3$，因为$x_3>1$，所以$\frac{x_3-1}{x_3+1}>\frac{3a(x_3^2-1)}{x_3^2+4x_3+1}$.

因为$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$. 所以 $1+\frac{1}{x_3}+x_3<\frac{3-3a}{3a-1}$.

因此 $3<x_1+x_2+x_3<\frac{3-3a}{3a-1}$.

…………（12 分）

【如何想到证明：$x>1$ 时，$\ln x>\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$】

因为$x_1+x_2+x_3=1+\frac{1}{x_3}+x_3$，所以 $1+\frac{1}{x_3}+x_3<\frac{3-3a}{3a-1}$等价于：

$$\frac{1}{x_3}+x_3+2<\frac{2}{3a-1}.$$

等价于

$$(3a-1)(x_3+1)^3<2x_3.$$

等价于

$$x_3^2+4x_3+1>3a(x_3+1)^2.$$

等价于

$$\frac{1}{x_3+1}>\frac{3a(x_3+1)}{x_3^2+4x_3+1}.$$

等价于

$$\frac{x_3-1}{x_3+1}>\frac{3a(x_3^2-1)}{x_3^2+4x_3+1}.$$

由于 $f(x_3)=0$，所以$\frac{x_3-1}{x_3+1}=a\ln x_3$，从而$\frac{x_3-1}{x_3+1}>\frac{3a(x_3^2-1)}{x_3^2+4x_3+1}$等价于

$$a\ln x_3>\frac{3a(x_3^2-1)}{x_3^2+4x_3+1}.$$

因此我们只需证明：当 $x>1$ 时，$\ln x>\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$.