

2022/2023 学年度第二学期期终调研考试

高二数学参考答案

一、单选题：（本大题共 8 小题，每小题 5 分，计 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的）

1. B 2. A 3. C 4. C 5. C 6. D 7. A 8. D

二、多选题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，计 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对得 3 分，有选错的得 0 分，请在答题纸的指定位置填涂答案选项.）

9. ACD 10. BD 11. ABD 12. ABD

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，计 20 分.）

13. 2.2 14. 1 15. $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{6} \ln 3$ 16. $\frac{83}{192}$

四、解答题

17. 解：（1）因为 $a_{n+1} = \frac{a_n}{3^n}$ ，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3^n}$.

所以 $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^2} \cdots \frac{1}{3^{n-1}} = 3^{-\frac{n(n-1)}{2}}$ 3 分

当 $n=1$ 时，上式也符合，所以该数列的通项公式为 $a_n = 3^{-\frac{n(n-1)}{2}}$ 4 分

（2） $b_n = 2n - \log_3 a_n^2 = 2n + n(n-1) = n^2 + n$ ，6 分

$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 8 分

$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ 10 分

18. 解：（1）提出假设 H_0 ：“主动学习”与性别无关1 分

则 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{50(18 \times 19 - 6 \times 7)^2}{24 \times 26 \times 25 \times 25} = \frac{150}{13} \approx 11.54$

因为 $P(K^2 \geq 10.828) = 0.001$, 而 $11.54 > 10.828$

故有 99% 的把握认为是否为“主动学习”与性别有关.....5 分

(2) 根据分层抽样, 抽取的男生人数为 3 人, 女生人数为 1 人,

记“恰有两人闯关成功”为事件 A , “有女生闯关成功”为事件 B ,

则, $P(A) = C_3^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{5}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right) + C_3^1 \left(\frac{4}{5}\right) \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{21}{125}$ 7 分

$P(AB) = C_3^1 \left(\frac{4}{5}\right) \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{9}{125}$ 9 分

由条件概率的公式得, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{125}}{\frac{21}{125}} = \frac{3}{7}$

故在恰有两人闯关成功的条件下, 有女生闯关成功的概率为 $\frac{3}{7}$ 12 分

19. 解: (1) 连接 BD 交 AC 于点 O 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $OB \perp AC$,

$OD \perp AC$.

以 O 为坐标原点, OB 为 x 轴, OC 为 y 轴, OD 为 z 轴建立如图所示空间直角坐标系.

由题意, 正方形 $ABCD$ 中 $AC = BD = 2$, 所以 $O(0, 0, 0)$, $A(0, -1, 0)$, $B(1, 0, 0)$,

$C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$.

所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{CD} = (0, -1, 1)$ 3 分

设 AB 与 CD 所成角为 α , $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ 6 分

(2) 方法一: 在三棱锥 $D-ABC$ 中, 取 BD 中点 M , 连接 MA, MC .

因为 $AB = AD = BC = CD = 2$, 所以 $MA \perp BD, MC \perp BD$, $\angle AMC$ 即为所求二面角

的平面角.....8 分

因为 $OB = OD = 1$, $\angle BOD = 90^\circ$, 所以 $BD = \sqrt{2}$, 所以 $MA = MC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 10 分

$$\cos \angle AMC = \frac{MA^2 + MC^2 - AC^2}{2MA \cdot MC} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2^2}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{1}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方法二：设平面 ADB 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{DB} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x_1 + y_1 = 0 \\ x_1 - z_1 = 0 \end{cases}$ ，

令 $x_1 = 1$ ，则 $y_1 = -1, z_1 = 1$ ，所以 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ 。.....8 分

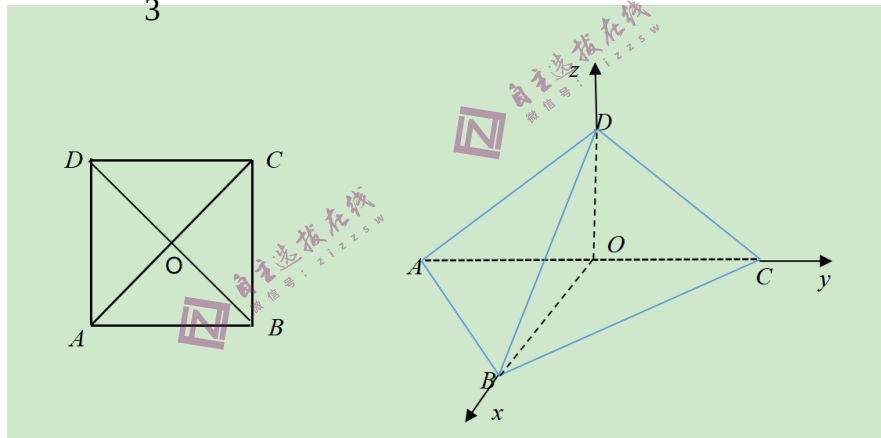
设平面 CDB 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{DC} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{DB} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} y_2 - z_2 = 0 \\ x_2 - z_2 = 0 \end{cases}$ ，

令 $x_2 = 1$ ，则 $y_2 = 1, z_2 = 1$ ，所以 $\vec{n}_2 = (1, 1, 1)$ 。.....10 分

设二面角 $A-DB-C$ 的平面角为 θ ， θ 为钝角。

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}，\text{ 所以 } \cos \theta = -\frac{1}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(注：若求得 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ，则扣 1 分)



20. 解：(1) 设“学生获得 2 分”为事件 A

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) X 的取值分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$P(X=0) = \frac{1}{3}, P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, P(X=2) = \frac{4}{27}$$

$$P(X=3) = C_2^1 \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + C_3^1 \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

$$P(X=5) = C_3^1 \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, P(X=6) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

\dots\dots\dots 10 分

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

$$E(X) = \frac{19}{9} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21.解：

$$(1) \text{ 由题意可知 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}ab = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = 4, b^2 = 1,$$

所以椭圆 E 的方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 设直线 MN 的方程为 $x = my + n$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

则 $P(2(1-y_1), y_1), Q(4-4y_1-x_1, y_1)$, 将直线 MN 的方程代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 并整理得：

$$(m^2+4)y^2+2mny+n^2-4=0, \text{ 则 } y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2+4}, y_1 \cdot y_2=\frac{n^2-4}{m^2+4}$$

$$\text{且 } \Delta=(2mn)^2-4(m^2+4)(n^2-4)>0 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由 $B(0,1), Q(4-4y_1-x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 三点共线可得

$$\frac{y_1-1}{4-4y_1-x_1}=\frac{y_2-1}{x_2},$$

整理可得

$$\begin{aligned} -4 &= \frac{x_1}{y_1-1} + \frac{x_2}{y_2-1} = \frac{my_1+n}{y_1-1} + \frac{my_2+n}{y_2-1} \\ &= 2m+(m+n) \frac{y_1+y_2-2}{y_1 \cdot y_2 - (y_1+y_2)+1} \\ &= 2m+(m+n) \frac{-\frac{2mn}{m^2+4}-2}{\frac{n^2-4}{m^2+4} - (\frac{2mn}{m^2+4})+1} \end{aligned}$$

$$\text{化简得 } m+n-2=0 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 MN 的方程为 } x=my+n=my+2-m=m(y-1)+2$$

$$\text{故直线 MN 过定点 } (2,1) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解：

$$(1) \text{ 因为函数 } f(x)=a \ln(x-\frac{\pi}{4})+\sin x \text{ 在区间 } (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以 } \forall x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), f'(x)=\frac{a}{x-\frac{\pi}{4}}+\cos x \geq 0 \text{ 恒成立, } \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以 $a \geq \left[\left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cos x \right]_{\max}$,

记 $\varphi(x) = \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cos x$

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$, $\cos x > 0$, $\varphi(x) < 0$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$, $\cos x < 0$ 且单调递减, 则 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$ 单调递增所以

$a \geq \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$ 5分

(2) 记 $g(x) = f(x) - \cos x$, 则

$$\begin{aligned} g(x) &= a \ln\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin x - \cos x \\ &= a \ln\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

令 $x - \frac{\pi}{4} = t$, 记 $h(t) = a \ln t + \sqrt{2} \sin t$

当 $a = 0$ 时, 取 $t = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 则 $h(t) = 0$ 7分

当 $a < 0$ 时, $h(1) = \sqrt{2} \sin 1 > 0$, $h(\pi) = a \ln \pi < 0$, 因为函数 $h(t) = a \ln t + \sqrt{2} \sin t$ 连续的, 所以总存在 $t_0 \in (1, \pi)$, 使得 $h(t_0) = 0$ 9分

当 $a > 0$ 时,

$$h(1) = \sqrt{2} \sin 1 > 0,$$

$$h\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}} = \sqrt{2}(\sin e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}} - 1) < 0,$$

因为 $e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}} \in (0, 1)$, 所以总存在 $t_0 \in (e^{-\frac{\sqrt{2}}{a}}, 1)$, 使得 $h(t_0) = 0$ 12分

综上: 对任意的实数 a , 方程 $f(x) = \cos x$ 均有解.